OPTICA ACTA

Vol. 4. N° 3 September 1957

Eine allgemeine Lösung des Schichtproblems der Optik

Anton Bigelmaier

Institut für Angewandte Physik, Marburg

Zusammenfassung. — *Für die Durchlässigkeit und Reflexion eines Schichtsystems, bestehend aus planparallelen Teilsystemen, werden explizite Formeln angegeben. Die durch die spezielle Art der Zusammensetzung bedingten Kopplungseffekte werden durch « Kopplungsfaktoren » beschrieben.*

Summary. — *Explicit formulae are given for the transmission and reflection of a system of plane parallel thin films. Coupling effects arising in various possible arrangements are described by coupling factors.*

Sommaire. — *Des formules explicites sont données ici pour le calcul de la transmission et réflexion d'un système de couches minces plan-parallèles. Les effets de couplage résultant des diverses dispositions possibles sont décrits à l'aide des facteurs de couplage.*

I. **Grundlagen.** — Die Bestimmung der Durchlässigkeit und Reflexion eines Schichtsystems, das aus m planparallelen, homogenen und isotropen Schichten besteht, kann als Randwertaufgabe der Maxwell'schen Gleichungen aufgefasst werden. Für das entstehende lineare Gleichungssystem lassen sich nur in einfachen Fällen übersichtliche Lösungen angeben.

Will man kompliziertere Systeme behandeln, so erweist es sich als vorteilhaft, das Schichtsystem in zwei Teilsysteme zu zerlegen (Abb. 1). In jedem Medium

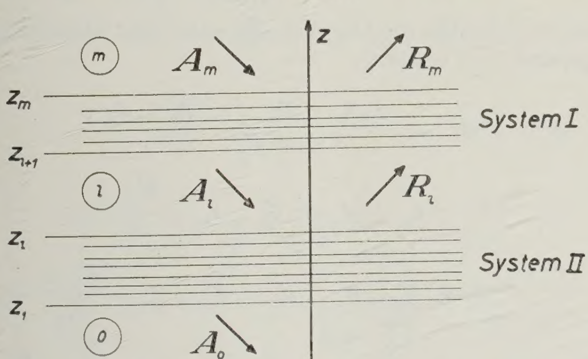

Abb. 1. — Zwei hintereinandergesetzte Schichtsysteme.

i sei eine ebene und linear polarisierte " anlaufende " Welle

$$A_i = A_i^0 \, e^{\rho_i z}$$

und " reflektierte " Welle

$$R_i = R_i^0 \, e^{-\rho_i z}$$

erklärt. Dabei bedeutet

$$\rho_i = \frac{i\,\omega}{c} n_i \cos \alpha_i \; .$$

ω ist dei Kreisfrequenz, c dei Lichtgeschwindigkeit, n_i der komplexe Brechungsindex und α_i der Einfalls-bzw. Austrittswinkel der Welle. Setzen wir bei einer von oben kommenden Welle

$$\frac{A_0}{A_m} = d_{II+I} \quad \text{und} \quad \frac{R_m}{A_m} = r_{II+I} \, ,$$

bei einer von unten kommenden Welle

$$\frac{R_m}{R_0} = d'_{II+I} \quad \text{und} \quad \frac{A_0}{R_0} = r'_{II+I}$$

und im gleichen Sinne d_I, r_I, d_{II}, usw. für die Teilsysteme I und II, so gilt [1, 2]

$$(1) \qquad d_{II+I} = \frac{d_{II} \, e^{-\rho_I d_I} \, d_I}{1 - r'_{II} \, e^{-2\rho_I d_I} \, r_I} \, ,$$

$$(2) \qquad r_{II+I} = \frac{r_{II} + (d_{II} d'_{II} - r_{II} r'_{II}) \, e^{-2\rho_I d_I} \, r_I}{1 - r'_{II} \, e^{-2\rho_I d_I} \, r_I} =$$

$$= r_{II} + d'_{II} \, e^{-\rho_I d_I} \, r_I \, \frac{d_{II+I}}{d_I} \, .$$

Hier ist $d_I = z_{I+1} - z_I$ der Abstand der Schichtsysteme I und II.

II. **Die allgemeinen Formeln.** — Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall von n + 1 planparallelen Schichtsystemen (Abb. 2). Dabei seien die Eigenschaften jeder einzelnen Schichtgruppe i vorgegeben durch die Grössen d_i, r_i, d'_i, r'_i .

Die n + 1 Schichtgruppen teilen wir in zwei Teilsysteme auf. Das System I bestehe aus den Schichtgruppen 1 bis n, II identifizieren wir mit der (n + 1) ten Schichtgruppe. Wir setzen also

$$d_I = d^{(n)} \, , \quad d_{II} = d_{n+1} \, , \quad d'_{II} = d'_{n+1} \, , \quad d_{II+I} = d^{(n+1)} \, ,$$
$$r_I = r^{(n)} \, , \quad r_{II} = r_{n+1} \, , \quad r'_{II} = r'_{n+1} \, , \quad r_{II+I} = r^{(n+1)} \, .$$

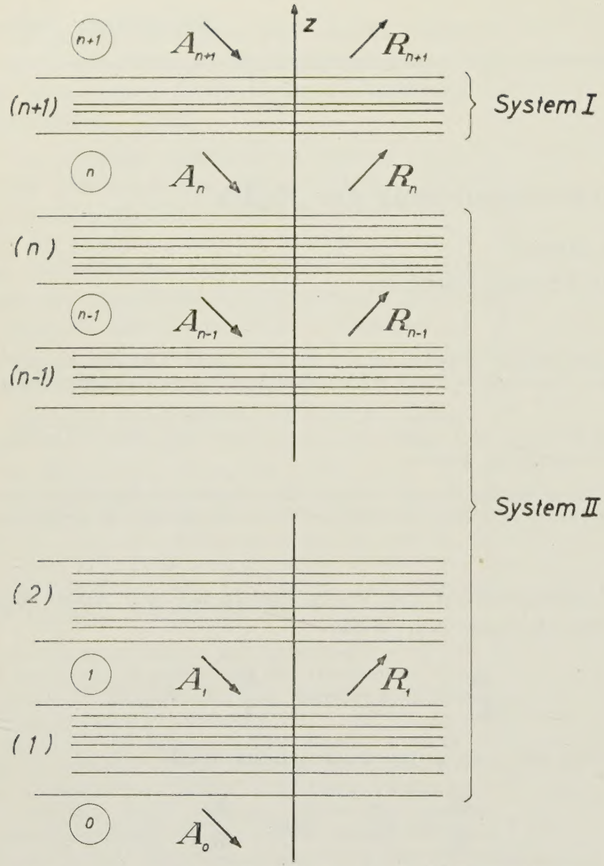

Abb. 2. — n + 1 hintereinandergesetzte Schichtgruppen.

Mit der Abkürzung $e^{-\rho_i d_i} = \delta_i$ nehmen die Rekursionsformeln (1) und (2) die folgende Gestalt an:

$$(3) \qquad d^{(n+1)} = \frac{d_{(n+1)}\, \delta_n\, d^{(n)}}{1 - r'_{n+1}\, \delta_n^2\, r^{(n)}}$$

$$(4) \qquad r^{(n+1} = r_{n+1}\, d'_{n+1}\, \delta_n\, r^{(n)}\, \frac{d^{(n+1)}}{d^{(n)}} .$$

Wir betrachten jetzt Schichtsysteme, die sich aus 1, 2, 3, usw. Schichtgruppen zusammensetzen. Für die Durchlässigkeiten erhalten wir

$$d^{(1)} = d_1\ ;$$

$$d^{(2)} = \frac{d_2\, \delta_1\, d_1}{1 - r'_2\, \delta_1^2\, r^{(1)}} ,$$

$$d^{(3)} = \frac{d_3\, \delta_2\, d_2\, \delta_1\, d_1}{(1 - r'_3\, \delta_2^2\, r^{(2)})\,(1 - r'_2\, \delta_1^2\, r^{(1)})} ,$$

also allgemein

$$(5) \qquad d^{(n)} = \frac{d_n\, \delta_{n-1}\, d_{n-1} \dots d_2\, \delta_1\, d_1}{(1 - r'_n\, \delta_{n-1}^2\, r^{(n-1)}) \dots (1 - r'_3\, \delta_2^2\, r^{(2)})\,(1 - r'_2\, \delta_1^2\, r^{(1)})} .$$

Ähnlich ergibt sich für die Reflexionsgrössen

$$r^{(1)} = r_1\ ,$$

$$r^{(2)} = r_2 + d'_2\, \delta_1\, r_1\, \frac{d^{(2)}}{d^{(1)}} ,$$

$$r^{(3)} = r_3 + d'_3\, \delta_2\, r_2\, \frac{d^{(3)}}{d^{(2)}} + d'_3\, \delta_2\, d'_2\, \delta_1\, r_1\, \frac{d^{(3)}}{d^{(1)}} ,$$

Allgemein vermuten wir

$$(6) \qquad r^{(n)} = r_n + d'_n\, \delta_{n-1}\, r_{n-1}\, \frac{d^{(n)}}{d^{(n-1)}} + d'_n\, \delta_{n-1}\, d'_{n-1}\, \delta_{n-2}\, r_{n-2}\, \frac{d^{(n)}}{d^{(n-2)}} + \dots \dots + d'_n\, \delta_{n-1}\, d'_{n-1} \dots d'_2\, \delta_1\, r_1\, \frac{d^{(n)}}{d^{(1)}} .$$

Dass diese Beziehungen für $d^{(n)}$ und $r^{(n)}$ bei beliebigem n gültig sind, lässt sich durch vollständige Induktion zeigen. Der Beweis sei seiner Einfachleit wegen übergangen.

Der Nenner der Durchlässigkeitsgrösse (5) beschreibt die Kopplungseffekte des Schichtsystems. Führen wir für diesen " Kopplungsfaktor " die Abkürzung

$$(7) \qquad K_n = (1 - r'_n\, \delta_{n-1}^2\, r^{(n-1)}) \dots \dots (1 - r'_3\, \delta_2^2\, r^{(2)})\,(1 - r'_2\, \delta_1^2\, r^{(1)})$$

ein, so erhalten die Durchlässigkreits- und Reflexionsgrössen die Gestalt

$$(8) \qquad d^{(n)} = \frac{d_n\, \delta_{n-1}\, d_{n-1} \dots d_2\, \delta_1\, d_1}{K_n} ,$$

$$(9) \qquad r^{(n)} = r_n + d_n\, d'_n\, \delta_{n-1}^2\, r_{n-1}\, \frac{K_{n-1}}{K_n} + d_n\, d'_n\, \delta_{n-1}^2\, d_{n-1}\, d'_{n-1}\, \delta_{n-2}^2\, r_{n-2}\, \frac{K_{n-2}}{K_n} + \dots \dots + d_n\, d'_n\, \delta_{n-1}^2 \dots d_2\, d'_2\, \delta_2^2\, r_1\, \frac{K_1}{K_n} .$$

III. **Die Kopplungsfaktoren.** — Für die Kopplungsfaktoren lässt sich leicht eine Rekursionsformel ableiten. Setzen wir (8) in (3) ein, so gilt

$$d^{(n+1)} = \frac{d_{n+1}\, \delta_n\, d_n \dots d_2\, \delta_1\, d_1}{K_{n+1}} = \frac{d_{n+1}\, \delta_n\, d_n \dots d_2\, \delta_1\, d_2}{(1 - r'_{n+1}\, \delta_n^2\, r^{(n)})\, K_n} .$$

Durch Vergleich der Nenner und Einsetzen von $r^{(n)}$ folgt die gesuchte Beziehung

$$(10) \qquad K_{n+1} = K_n - \{ r'_{n+1}\, \delta_n^2\, r_n\, K_n + r'_{n+1}\, \delta_n^2\, d_n\, d'_n\, \delta_{n-1}^2\, r_{n-1}\, K_{n-1} + \dots \dots + r'_{n+1}\, \delta_n^2\, d_n\, d'_n \dots d_2\, d'_2\, \delta_1^2\, r_1\, K_1 \} .$$

Nach dieser Formel bestimmen wir die ersten Kopplungsfaktoren. Wenn wir Glieder gleicher Faktorenzahl zusammenziehen und die Klammersymbole

$$\text{(11)}\qquad \begin{bmatrix}\varkappa\\ \lambda\end{bmatrix} = \begin{cases} r_\varkappa r'_\varkappa - d_\varkappa d'_\varkappa & \\ & \text{für} \\ r_\varkappa r'_\lambda & \end{cases} \qquad \begin{matrix}\varkappa = \lambda\\ \\ \varkappa \neq \lambda\end{matrix}$$

einführen, so erhalten wir

$$K_1 = 1\ ,$$

$$K_2 = 1 - r'_2\,\delta_1^2\,r_1\ ,$$

$$K_3 = 1 - \sum_{\varkappa_1=0}^{1} r'_{3-\varkappa_1}\,\delta^2_{2-\varkappa_1}\,r_{2-\varkappa_1} + r'_3\,\delta^2_2\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\delta^2_1\,r_1\ ,$$

$$K_4 = 1 - \sum_{\varkappa_2=0}^{2} r'_{4-\varkappa_2}\,\delta^2_{3-\varkappa_2}\,r_{3-\varkappa_2} + \sum_{\varkappa_2,\varkappa_1=0}^{1} r'_{4-\varkappa_2}\,\delta^2_{3-\varkappa_2}\begin{bmatrix}3-\varkappa_2\\3-\varkappa_1\end{bmatrix}\delta^2_{2-\varkappa_1}\,r_{2-\varkappa_1} - r'_4\,\delta^2_3\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}\delta^2_2\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\delta^2_1\,r_1\ .$$

Allgemein vermuten wir

$$\text{(12)}\qquad \begin{aligned} K_n = 1 &- \sum_{\varkappa_{n-2}=0}^{n-2} r'_{n-\varkappa_{n-2}}\,\delta^2_{n-1-\varkappa_{n-2}}\,r_{n-1-\varkappa_{n-2}} \\ &+ \sum_{\varkappa_{n-2},\varkappa_{n-3}=0}^{n-3} r'_{n-\varkappa_{n-2}}\,\delta^2_{n-1-\varkappa_{n-2}} \\ &\quad \begin{bmatrix}n-1-\varkappa_{n-2}\\n-1-\varkappa_{n-3}\end{bmatrix}\delta^2_{n-2-\varkappa_{n-3}}\,r_{n-2-\varkappa_{n-3}} \\ &+ \,\ldots\ldots. \\ &+ (-1)^{n-1}\,r'_n\,\delta^2_{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\n-1\end{bmatrix}\delta^2_{n-2} \\ &\qquad \begin{bmatrix}n-2\\n-2\end{bmatrix}\ldots.\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\delta^2_1\,r_1\ .\end{aligned}$$

Diese Vermutung lässt sich durch vollständige Induktion beweisen. Zu diesem Zwecke schreiben wir Glieder gleicher Faktorenzahl zusammen ([1]). Die Summanden mit zwei Faktoren sind

$$\sum_{\varkappa_{n-2}=0}^{n-2} r'_{n-\varkappa_{n-2}}\,r_{n-1-\varkappa_{n-2}} + r'_{n+1}\,r_n = \sum_{\varkappa_{n-1}=0}^{n-1} r'_{n+1-\varkappa_{n-1}}\,r_{n-\varkappa_{n-1}}\ .$$

Das ist aber gerade die erste Summe von K_{n+1}. Für die zweite Summe folgt nach dem gleichen Verfahren, wenn wir nur

$$r_n\,r'_n - d_n\,d'_n = \begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix} \quad\text{und}\quad r_n\,r'_{n-\varkappa_{n-1}} = \begin{bmatrix}n\\n-\varkappa_{n-1}\end{bmatrix}$$

setzen :

$$\begin{aligned} &\sum_{\varkappa_{n-2},\varkappa_{n-3}=0}^{n-3} r_{n-\varkappa_{n-2}}\begin{bmatrix}n-1-\varkappa_{n-2}\\n-1-\varkappa_{n-3}\end{bmatrix} r_{n-2-\varkappa_{n-3}} + \\ &+ r'_{n+1}\,r_n \sum_{\varkappa_{n-2}=0}^{n-2} r'_{n-\varkappa_{n-2}}\,r_{n-1-\varkappa_{n-2}} - r'_{n+1}\,d_n\,d'_n\,r_{n-1} \\ &= \sum_{\varkappa_{n-2},\varkappa_{n-3}=0}^{n-3} r'_{n-\varkappa_{n-2}}\begin{bmatrix}n-1-\varkappa_{n-2}\\n-1-\varkappa_{n-3}\end{bmatrix} r_{n-2-\varkappa_{n-3}} + \\ &\quad + \sum_{\varkappa_{n-1}=0}^{n-2} r'_{n+1-\varkappa_{n-1}}\begin{bmatrix}n\\n-\varkappa_{n-1}\end{bmatrix} r_{n-1-\varkappa_{n-2}} \\ &= \sum_{\varkappa_{n-1},\varkappa_{n-2}=0}^{n-2} r'_{n+1-\varkappa_{n-1}}\begin{bmatrix}n-\varkappa_{n-1}\\n-\varkappa_{n-2}\end{bmatrix} r_{n-1-\varkappa_{n-2}}\ .\end{aligned}$$

Analog erhält man die anderen Summen von K_{n+1}. Durchgeführt sei der Beweis nur noch für den letzten Summanden. Hier ist

$$\begin{aligned} & r'_{n+1}\,r_n\,r'_n\begin{bmatrix}n-1\\n-1\end{bmatrix}\ldots.\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} r_1 - \\ &\quad - r'_{n+1}\,d_n\,d'_n\,r_{n-1}\,r'_{n-1}\begin{bmatrix}n-2\\n-2\end{bmatrix}\ldots.\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} r_1 + \\ &\quad + \ldots + (-1)^{n-2}(r'_{n+1}\,d_n\,d'_n \ldots d_3\,d'_3\,r_2\,r'_2\,r_1 - \\ &\qquad - r'_{n+1}\,d_n\,d'_n\ \ldots\ d_3\,d'_3\,d_2\,d'_2\,r_1) \\ &= \ldots + r'_{n+1}\,d_n\,d'_n\ \ldots\ d_2\,d'_3(r_2\,r'_2 - d_2\,d'_2)r_1 \\ &= \ldots + r'_{n+1}\,d_n\,d'_n\ \ldots\ d_3\,d'_3\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} r_1 = \ldots\ldots \\ &= r'_{n+1}(r_n\,r'_n - d_n\,d'_n)\begin{bmatrix}n-1\\n-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-2\\n-2\end{bmatrix}\ldots\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} r_1 \\ &= r'_{n+1}\begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-1\\n-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-2\\n-2\end{bmatrix}\ldots.\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} r_1\ .\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die Formel (12) für beliebiges n richtig ist.

Mit Hilfe der Beziehungen (8), (9) und (12) lässt sich der Verlauf der Durchlässigkeiten und Reflexionen eines beliebigen Schichtsystems qualitativ und quantitativ beurteilen.

IV. **Zwei Beispiele.** — Im Folgenden wollen wir zwei spezielle Schichtsysteme berechnen. Dazu brauchen wir die explizite Gestalt der jeweiligen Kopplungsfaktoren K_n. Aus der Tabelle 1 können wir die Kopplungsfaktoren K_1 bis K_5 entnehmen. Wir haben dabei

([1]) Die δ lassen wir beim Beweise der Übersichtlichkeit wegen fort.

TABELLE 1

n	δ^0	δ^2	δ^4	δ^6	δ^8
1	1				
2		$-r'_2\delta_1^2 r_1$			
3		$-r'_3\delta_2^2 r_2$	$r'_3\delta_2^2\left[\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}\right]\delta_1^2 r_1$		
4		$-r'_4\delta_3^2 r_3$	$r'_4\delta_3^2\left[\begin{smallmatrix}3\\3\end{smallmatrix}\right]\delta_2^2 r_2$ $r'_4\delta_3^2\left[\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\right]\delta_1^2 r_1$	$-r'_4\delta_3^2\left[\begin{smallmatrix}3\\3\end{smallmatrix}\right]\delta_2^2\left[\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}\right]\delta_1^2 r_1$	
5		$-r'_5\delta_4^2 r_4$	$r'_5\delta_4^2\left[\begin{smallmatrix}4\\4\end{smallmatrix}\right]\delta_3^2 r_3$ $r'_5\delta_4^2\left[\begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}\right]\delta_2^2 r_2$ $r'_5\delta_4^2\left[\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}\right]\delta_1^2 r_1$	$-r'_5\delta_4^2\left[\begin{smallmatrix}4\\4\end{smallmatrix}\right]\delta_3^2\left[\begin{smallmatrix}3\\3\end{smallmatrix}\right]\delta_2^2 r_2$ $-r'_5\delta_4^2\left[\begin{smallmatrix}4\\4\end{smallmatrix}\right]\delta_3^2\left[\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\right]\delta_1^2 r_1$ $-r'_5\delta_4^2\left[\begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}\right]\delta_2^2\left[\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}\right]\delta_1^2 r_1$	$r'_5\delta_4^2\left[\begin{smallmatrix}4\\4\end{smallmatrix}\right]\delta_3^2\left[\begin{smallmatrix}3\\3\end{smallmatrix}\right]\delta_2^2\left[\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}\right]\delta_1^2 r_1$

z. B. für K_3 die Glieder bis einschliesslich n = 3 zu berücksichtigen und erhalten :

$$K_3 = 1 - r'_3\,\delta_2^2\,r_2 - r'_2\,\delta_1^2\,r_1 + r'_3\,\delta_2^2\left[\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right]\delta_1^2\,r_1\,.$$

Analog kann man die Tabelle auf Kopplungsfaktoren höheren Indexes erweitern. Dabei nimmt die Anzahl der Summanden mit waschsendem n sehr stark zu.

In Sonderfällen erhält man aber auch für grosse n übersichtliche Formeln, die sich für numerische Rechnungen sehr gut eignen. In unseren Beispielen wollen wir unter den einzelnen Schichtgruppen stets einfache Grenzflächen verstehen. Dann sind die Durchlässigkeits- bzw. Reflexionsgrössen gegeben durch

$$d_l = \frac{2\,g_l}{g_l + g_{l-1}}\,, \quad d'_l = \frac{2\,g_{l-1}}{g_{l-1} + g_l}\,, \tag{13}$$
$$r_l = \frac{g_l - g_{l-1}}{g_l + g_{l+1}} \quad \text{und} \quad r'_l = \frac{g_{l-1} - g_l}{g_{l-1} + g_l}\,.$$

TABELLE 2

n	δ^0	δ^2	δ^4	δ^6	δ^8	δ^{10}	δ^{12}	δ^{14}	δ^{16}	δ^{18}
1	1									
2		$-R$								
3		$-R$	R							
4		$-R$	R R^2	$-R$						
5		$-R$	R $2R^2$	$-R$ $-2R^2$	R					
6		$-R$	R $3R^2$	$-R$ $-4R^2$ $-R^3$	R $3R^2$	$-R$				
7		$-R$	R $4R^2$	$-R$ $-6R^2$ $-3R^3$	R $6R^2$ $3R^3$	$-R$ $-4R$	R			
8		$-R$	R $5R^2$	$-R$ $-8R^2$ $-6R^3$	R $9R^2$ $9R^3$ R^4	$-R$ $-8R^2$ $-6R^3$	R $5R^2$	$-R$		
9		$-R$	R $6R^2$	$-R$ $-10R^2$ $-10R^3$	R $12R^2$ $18R^3$ $4R^4$	$-R$ $-12R^2$ $-18R^3$ $-4R^4$	R $10R^2$ $10R^3$	$-R$ $-6R$	R	
10		$-R$	R $7R^2$	$-R$ $-12R^2$ $-15R^3$	R $15R^2$ $30R^3$ $10R^4$	$-R$ $-16R^2$ $-36R^3$ $-16R^4$ R^5	R $15R^2$ $30R^3$ $10R^4$	$-R$ $-12R^2$ $-15R^3$	R $7R^2$	$-R$

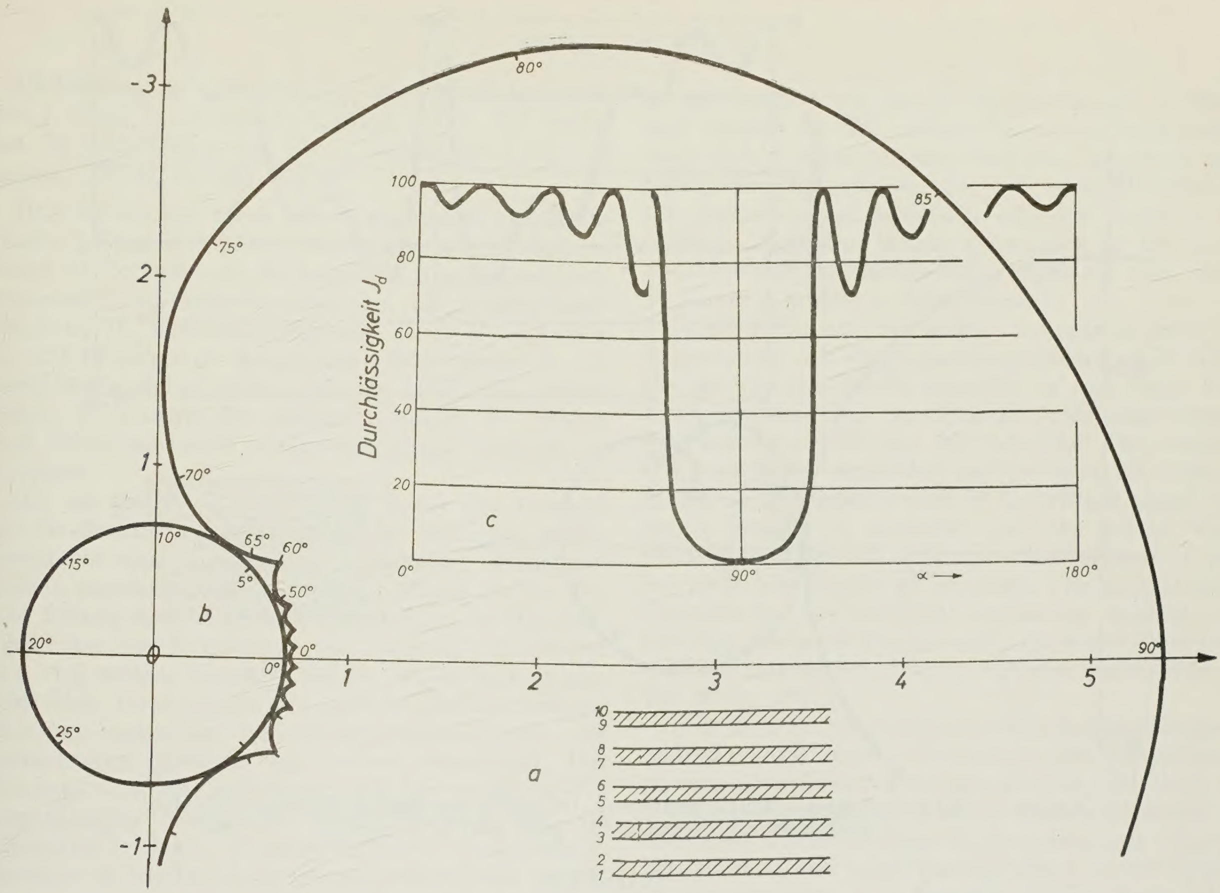

Abb. 3. — Interferenzfilter mit 10 Grenzflächen. Die optische Weglänge ist in allen Schichten gleich. $g_h = 2{,}6$; $g_t = 1{,}5$.

Damit erhalten wir für die durch (11) definierten Klammersymbole

$$
(14) \qquad \begin{bmatrix} \varkappa \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad \varkappa = \lambda \\ \dfrac{g_\varkappa - g_{\varkappa-1}}{g_\varkappa + g_{\varkappa-1}} \cdot \dfrac{g_{\lambda-1} - g_\lambda}{g_{\lambda-1} + g_\lambda} & \phantom{\text{für}} \quad \varkappa \neq \lambda . \end{cases}
$$

Das bedeutet eine wesentliche Vereinfachung unserer Formeln, besonders dann, wenn die g_1 als dispersionsfrei angenommen werden können.

Als erstes Beispiel wollen wir einen schon bekannten Schichttypus vornehmen. Es sollen Schichten höheren Brechungsindexes (im Beispiel $g_h = 2{,}6$) in Zaponlack eingebettet sein (also $g_t = 1{,}5$). Dabei wählen wir die Schichtdicken so, dass stets

$$
(15) \qquad \delta_l = e^{-\rho_l d_l} = e^{-i\alpha} = \delta
$$

unabhängig vom Index gilt. Die Klammersymbole sind dann

$$
(16) \qquad \begin{bmatrix} \varkappa \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad \varkappa = \lambda \\ (-1)^{\varkappa+\lambda-1} R & \phantom{\text{für}} \quad \varkappa \neq \lambda \end{cases}
$$

$$
\text{mit} \quad R = \left(\frac{g_h - g_t}{g_h + g_t} \right)^2 .
$$

Für ein System mit 10 Grenzflächen (Abb. 3 a) haben wir in Tabelle 2 die Vereinfachungen im einzelnen abgeleitet. Fassen wir die zu einer bestimmten δ-Potenz gehörenden Faktoren zusammen, so erhalten wir für den Kopplungsfaktor

$$
\begin{aligned}
K_{10} = 1 & - 9 R\delta^2 + (8 R + 28 R^2)\delta^4 \\
& - (7 R + 42 R^2 + 35 R^3)\delta^6 \\
& + (6 R + 45 R^2 + 60 R^3 + 15 R^4)\delta^8 \\
& - (5 R + 40 R^2 + 60 R^3 + 20 R^4 + R^5)\delta^{10} \\
& + (4 R + 30 R^2 + 40 R^3 + 10 R^4)\delta^{12} \\
& - (3 R + 18 R^2 + 15 R^3)\delta^{14} \\
& + (2 R + 7 R^2)\delta^{16} - R\delta^{18} .
\end{aligned}
$$

In Abb. 3 b stellt der Kreis die Durchlässigkeit des betrachteten Schichtsystems dar, wobei aber alle Kopplungseffekte vernachlässigt sind. Die andere Ortskurve stellt den Kopplungsfaktor nach Betrag und Phase dar. Die durchgelassene Intensität des Filters ist in Abb. 3 c wiedergegeben.

Im zweiten Beispiel benutzen wir die gleichen Brechungsindizes wie im ersten, aber die Dicke der optisch dichteren Schichten wächst wie die Folge 1, 2, 3, usw. Für 6 Grenzflächen (Abb. 4 a) sind in Tabelle 3 die Vereinfachungen angegeben. Für den Kopplungsfaktor erhalten wir hier

$$
\begin{aligned}
K_6 = 1 & - 3 R\delta^2 + 2 R^2\delta^4 - R\delta^6 - (R - R^2)\delta^8 \\
& + (R - 2 R^2)\delta^{10} - (R + R^3)\delta^{12} \\
& + (R + 2 R^2)\delta^{14} - R\delta^{16} .
\end{aligned}
$$

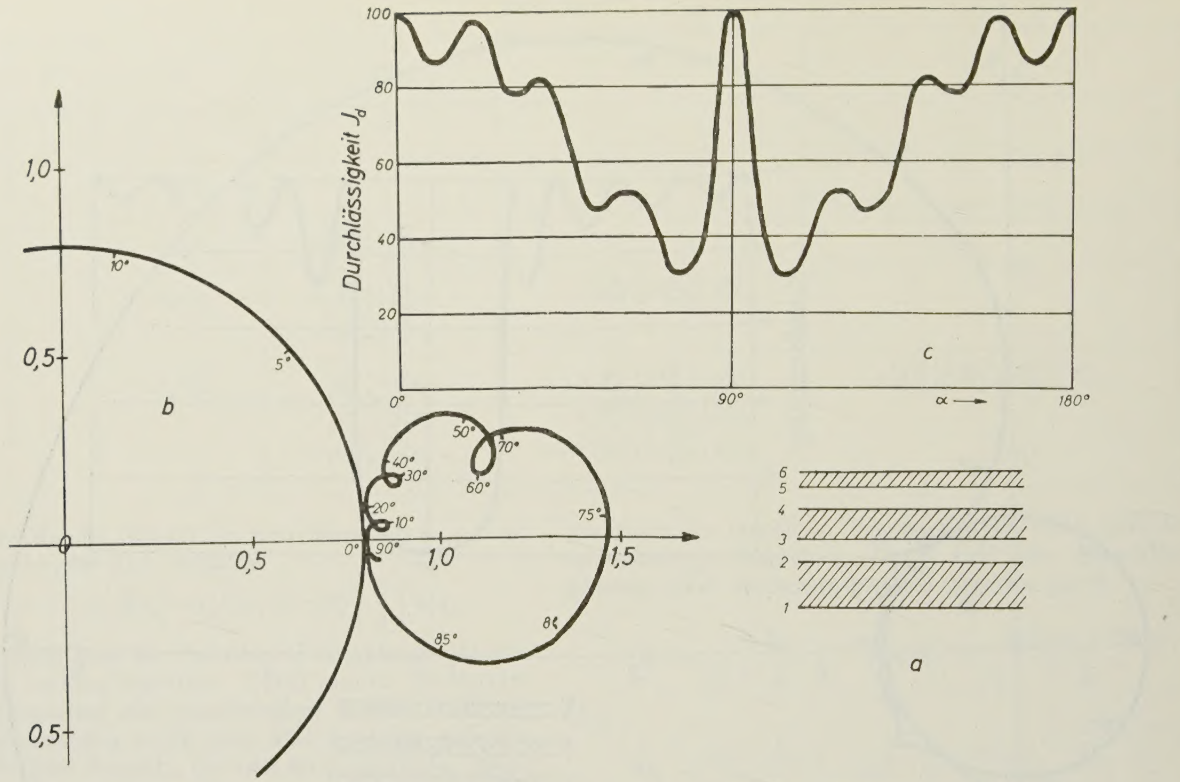

Abb. 4. — Interferenzfilter mit 6 Grenzflächen. Die Dicke der optisch dichteren Schichten wächst wie die Folge 1, 2, 3. $g_h = 2,6$; $g_t = 1,5$.

Tabelle 3

n	δ^0	δ^2	δ^4	δ^6	δ^8	δ^{10}	δ^{12}	δ^{14}	δ^{16}
1	1								
2				$-R$					
3		$-R$			R				
4			$-R$	R		R^2	$-R$		
5		$-R$	R^2	R	$-R$ R^2	$-R^2$	$-R^2$	R	
6		$-R$	R R^2		$-R$	R $-2R^2$	R^2 $-R^3$	$2R^2$	$-R$

In Abb. 4 b sind wieder die kopplungsfreie Durchlässigkeit und der Kopplungsfaktor dargestellt, in Abb.4c die durchgelassene Intensität des Filters. Die entscheidenden Veränderungen gegenüber dem vorher behandelten Filtertyp sind das Auftreten eines Maximums bei $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und das Abfallen der Zwischenmaxima. Vollständige Durchlässigkeit haben wir also nur noch bei, $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$, usw.

Der Bandfiltercharakter kommt in beiden Beispielen gut zum Ausdruck. Dass die Formeln (8), (9) und (12) auch für andere Schichttypen geeignet sind, sieht man bei U. Gradmann [3].

Herrn Professor Dr H. Wolter möchte ich danken, hat mich doch sein Seminar über " Optik dünner Schichten " zu dieser Arbeit veranlasst. Auch der Arbeit von Herrn U. Gradmann verdanke ich manche Anregung.

[1] H. Wolter, *Hdb. Physik*, Bd. 24.
[2] H. Mayer, *Physik dünner Schichten*, Stuttgart, 1950.
[3] U. Gradmann, *Opt. Acta*, **3**, 1956, p. 30.

Manuscrit reçu le 11 octobre 1956.

BIBLIOGRAPHIE

Einführung in die Theorie der Elektronenoptik von J. Picht, 2., erweiterte Auflage, VIII, 274 Seiten mit 70 Abbildungen im Text, Leipzig 1957, Gr. 8° brosch. DM 29, 20; geb. DM 31, -.

Das vorliegende Werk ist die wesentlich erweiterte zweite Auflage der 1939 erschienenen ersten. Wie bei dieser ist ihr Inhalt in die folgenden Hauptabschnitte unterteilt : A. Elektronenstrahlen als Korpuskularstrahlen, B. Elektronenstrahlen als Wellenstrahlen C. Abbildende und ablenkende Elektronenoptik, D. Abbildungsgesetze erster Ordnung (Paraxiale Abbildung), E. Theorie der Abbildungsfehler, F. Wellen und Beugungstheorie elektronenoptisch abbildender Systeme.

Bei der gesamten Darstellung wurde das Gewicht auf die theoretische Behandlung der Probleme gelegt, soweit sie ohne Anwendung numerischer Rechenmethoden darstellbar ist. Die einzige Ausnahme von diesem Prinzip stellt eine kurze Behandlung des Maschenverfahrens zur Ermittlung von Potentialverteilungen dar. Auf weitere Hinweise für die Praxis der durchzuführenden Rechnungen oder auf den Zusammenhang zwischen optischen und konstruktiven Daten der betrachteten Systeme ist bewusst verzichtet. Der Referent vermisste bei diesen rein theoretischen Untersuchungen wenigstens einen Hinweis auf die bekannten exakt durchrechenbaren Feldmodelle. Ausführlich werden dafür die im Institut des Verfassers durchgeführten interessanten Untersuchungen über die Berechnung des Feldverlaufs aus geforderten elektronenoptischen Abbildungseigenschaften dargestellt. Der in dieser Auflage neu hinzugefügte Abschnitt F ist leider nur sehr kurz ausgefallen (9 Seiten).

Durch die ausführliche Behandlung einzelner Näherungsmethoden kann das Buch dem Leser, der sich in die dem Verfasser eigene Darstellungs-und Bezeichnungsweise heneingefunden hat, sicher manche wertvolle Anregung geben. Vielleicht ist es in einer Neuauflage möglich, dem Benutzer dieser « Einführung » durch Hinweis auch auf andere zusammenfassende Darstellungen der reinen und angewandten Elektronenoptik die Einarbeitung in dieses Gebiet zu erleichtern.

D. Wiskott

The visual pigments by H. J. A. Dartnall, pp. 216 + 72 figs. Methuen, Publ. London.

Ever since the brilliant pioneer work of Kühne, the chemistry of the visual pigments has been recognized as defining the first link in the mechanism of vision, and interest in this subject has never been greater than to-day when modern technical advances, especially the photoelectric cell, are rapidly extending our precision, our knowledge and the range of our enquiry. Thus the timely appearance of Dr Dartnall's small but authoritative book on The Visual Pigments is greatly to be welcomed.

It brings within the modest compass of some 200 pages nearly all the important evidence upon which the modern standpoint depends, no easy task, since many fundamental questions are still controversial and require careful and fair handling. The scope of the book is the chemistry and comparative study of bleaching and regeneration of vertebrate visual pigments (mainly in extracts), and the writer wisely refrains from speculations upon the relation of photolysis to the physiology of seeing. The book is easily readable by an intelligent university student, and the clear historical background with which each main topic is introduced gives a valuable perspective to the whole field.

It is hard for an author to make important experimental contributions to his subject and still maintain an impeccable balance in presentation, and there are a few places in the book where the reader might see the wood clearer if some of the trees were thinned. But there is one small feature which in the opinion of this reviewer is undesirable in any book which aims at giving authoritative fact. It is the introduction of important experimental material which has not been published elsewhere, nor apparently is in preparation for publication. This is not satisfactory when the work is by the author (p. 191) still less when it is the "private communication" of a colleague (p. 200).

Dr Dartnall and his Publishers are to be congratulated upon the care and accuracy with which text and figures have been set up. Only one slip could be misleading ; it is on p. 199 where in redrawing a figure from *Optica Acta* the time scale of rhodopsin regeneration is reproduced as ten times too fast.

In this book are brought together for the first time the physical chemistry, the stereo-chemistry and the comparative biology of the vertebrate visual pigments. Its well-ordered composition, its readable style and its carefully documented facts will make it of value alike to the student and to the advanced research worker in the field of vision.

W. A. H. Rushton

Untersuchungen zu den Gesetzen des Fernrohrsehens

H. KÖHLER und R. LEINHOS, Oberkochen.

Vorgetragen von R. LEINHOS auf der Tagung der Deutschen Gesellschaft für angewandte Optik 1955 in Innsbruck *.

ZUSAMMENFASSUNG. — *Es wird über weitere Sehschärfenmessungen mit fernrohrbewaffnetem Auge berichtet, deren Auswertung eine unmittelbare Aussage gestattet, in welcher Weise Fernrohrvergrösserung und Objektivöffnung in die Sehleistung im Dämmerungs-und Nachtsehen eingehen. Der alte Meinungsstreit, ob im Gebiet des Dämmerungssehens eine Fernrohrübervergrösserung vorteilhaft ist oder nicht, wird dahingehend entschieden, dass bei gleicher Objektivöffnung eine stärkere Vergrösserung eine Erhöhung der Sehschärfe fast im gesamten Anwendungsgebiet der Feldstecher bewirkt. Der Vorteil ist am grössten beim Tagessehen (über* 10 *asb), ist im Dämmerungssehen (*10^{0}-10^{-2}, *Mondschein etwa* $10^{-0,5}$ *asb) immer noch beträchtlich. Bei etwa* 10^{-3} *asb ist die Fernrohrleistung von der Vergrösserung unabhängig, erst unterhalb dieser Leuchtdichte wirkt sich eine Übervergrösserung nachteilig auf die Sehleistung aus, die Fernrohraustrittspupille sollte hier also die Grösse der Augenpupille haben, zumindest nicht wesentlich kleiner sein.*

Die Sehschärfenmessungen wurden unter entsprechenden Vorsichtsmassnahmen im Labor vorgenommen. Als Sehschärfenkriterium diente die Erkennung der Lücke in Landoltringen verschiedener grösse und verschiedenen Kontrastes. Die Lichtschwächung über fünf Zehnerpotenzen (10^{1}-10^{-4} *asb) erfolgte mittels neuartiger Grauschichtenfilter, als Fernrohre fanden handelsübliche Feldstecher Verwendung, deren Unterschiede in den Verlusten und der Gesichtsfeldgrösse unberücksichtigt blieben. An den recht umfangreichen Messungen beteiligten sich vier Beobachter.*

Die Leistung eines Fernrohrs kann angenähert in der Form

$$L = C\,\Gamma^{1-x}\,D^{x} \qquad \text{oder} \qquad L = C\,\Gamma\,P^{x}$$

dargestellt werden. Darin bedeutet C eine sehr allgemeine, von der Umfeldleuchtdichte, Beobachter-und Fernrohreigenschaften abhängende Konstante, Γ *die Fernrohrvergrösserung, D den Objektivdurchmesser und P den Durchmesser der Austrittspupille des Fernrohrs. Der Exponent x ist in erster Linie von der Umfeldleuchtdichte abhängig, in geringerem Masse vom Kontrast der Sehzeichen, der Fernrohraustrittspupille, dem Adaptationszustand des Beobachters und Fernrohrverlusten.*

Als Mittelwert von vier Beobachtern, für Fernrohraustrittspupillen zwischen 1,6 *und* 7,1 *mm Durchmesser und einen Sehzeichenkontrast von etwa* — 1 *ergaben sich für x die folgenden Zahlenwerte :*

Umfeldleuchtdichte in asb :	$10^{-4,5}$	10^{-4}	$10^{-3,5}$	10^{-3}	$10^{-2,5}$	10^{-2}	$10^{-1,5}$	10^{-1}	$10^{-0,5}$	10^{0}	$10^{0,5}$	10^{1}
x :	1,5	1,2	0,9	0,7	0,52	0,48	0,46	0,45	0,42	0,28	0,12	0,0

Im Gebiet $10^{-2,5}$ *bis* 10^{-1} *asb, wo x etwa den Wert* 0,5 *annimmt, wird die alte Faust-Formel*

$$L = C\sqrt{\Gamma . D}$$

bestätigt. Unterhalb von $10^{-2,5}$ *asb steigt x an, der Einfluss der Vergrösserung auf die Fernrohrleistung nimmt ab, der Einfluss des Objektivdurchmesserszu. Unter* $10^{-3,5}$ *asb wächst x über den Wert* 1. *In diesem Bereich bringt jede Vergrösserung, die die Austrittspupille des Fernrohrs wesentlich kleiner (*< 6 *mm) als die Augenpupille des Beobachters (etwa* 7,4 *mm) werden lässt, eine Verminderung der Sehleistung mit sich. Oberhalb von* 10^{-1} *asb geht x allmählich gegen Null, dieser Wert gilt im reinen Tagessehen, d. h. der Objektivdurchmesser ist in weitem Masse ohne Einfluss auf die Fernrohrleistung.*

Diese Ergebnisse bestätigen weitgehend die Theorie der Fernrohrsehens von KÜHL, *die zunächst nur für* 7°*-extrafoveale Beobachtung gilt.*

SUMMARY. — *New measurements of visual acuity are described for the eye in conjunction with a telescope, and results given showing how visual acuity at low light intensities depends on the magnification and aperture of the instrument. It is shown that an increase of magnification under twilight conditions produces an increase in visual acuity in almost the whole range of field-glasses. The gain is greater for day vision (above 10 asb), but is significant in the region* 10^{0} *to* 10^{-2} *asb (moonlight gives about* $10^{-0.5}$ *asb). Towards* 10^{-3} *asb the instrumental efficiency is independent of magnification and below this acuity decreases with magnification; the exit pupil should then be approximately equal in size to that of the eye.*

The criterion of visual acuity was the recognition of the gap in LANDOLT *rings at different contrasts. Reduction of illumination over a range* 10^{-5} *(*10^{1} *to* 10^{-4} *asb) was obtained by a new type of grey filter; normal field-glasses were used.*

The performance of a telescope can be approximately represented by

$$L = C\,\Gamma^{1-x}\,D^{x} \qquad \text{or} \qquad L = C\,\Gamma\,P^{x},$$

where C is a general constant varying with illumination, observer and instrument, Γ *ils the magnification, D is the diameter of the objective and P that of the exit-pupil. x depends primarily on the illumination, and less strongly on the object contrast and instrumental losses.*

Taking the average for four observers, for exit pupils from 1.6 *to* 7.1 *mm and object contrast about -1, the following values of x were obtained.*

Illumination (in asb) :	$10^{-4.5}$	10^{-4}	$10^{-3.5}$	10^{-3}	$10^{-2.5}$	10^{-2}	$10^{-1.5}$	10^{-1}	$10^{-0.5}$	10^{0}	$10^{-0.5}$	10^{1}
x :	1.5	1.2	0.9	0.7	0.52	0.48	0.46	0.45	0.42	0.28	0.12	0.0

From $10^{-2.5}$ *to* 10^{-1} *where x is about 0.5, Faust's formula* $L = C\,\delta\,\Gamma\,D$ *is confirmed. Below* $10^{-2.5}$ *asb, x increases, and the influence of magnification falls, relative to that of objective diameter. Below* $10^{-3.5}$ *asb, x exceeds unity and any increase of magnification which makes the exit pupil significantly less than that of the eye decreases visual acuity. Above* 10^{-1} *asb x*

approaches zero corresponding to normal daylight vision so that the instrument performance is largely independent of objective diameter.

These results give general confirmation to Kuhl's *theory of telescopic vision, previously only confirmed for extra foveal vision at 7°.*

Sommaire. — *De nouvelles mesures d'acuité visuelle sont décrites, concernant l'œil muni d'un instrument télescopique; l'examen des résultats permet de dire directement de quelle façon le grossissement de l'instrument et l'ouverture de l'objectif interviennent dans l'acuité visuelle de la vision crépusculaire et nocturne.*

Existe-t-il oui ou non un avantage à augmenter le grossissement dans le domaine de la vision crépusculaire, c'est l'ancienne controverse qui se trouve réglée en ce sens qu'à égale ouverture d'objectif, un grossissement plus fort produit une amélioration de l'acuité visuelle dans la presque totalité du domaine d'emploi des jumelles. L'avantage est le plus important en vision diurne (au-dessus de 10 *asb), mais reste encore notable en vision crépusculaire* (10^{0}-10^{-2} *asb, le clair de lune donne environ* $10^{-0,5}$ *asb). Pour* 10^{-3} *asb environ, la puissance de l'instrument est indépendante du grossissement, et au-dessous de cette luminance, un excès de grossissement commence à devenir défavorable pour l'acuité visuelle, dans ce cas la pupille de sortie de l'instrument devrait donc avoir la grandeur de la pupille de l'œil, ou tout au moins ne pas être sensiblement plus petite.*

Les mesures d'acuité visuelle ont été entreprises au laboratoire en prenant les précautions convenables. Pour ce critère d'acuité visuelle, on utilisait des anneaux de Landolt de dimensions et contrastes différents. L'affaiblissement de la lumière jusque dans un rapport 10^5 *(de* 10^1 *à* 10^{-4} *asb) était obtenu à l'aide de filtres gris d'un nouveau modèle. Comme instruments télescopiques, on utilisait des jumelles de type courant, dont les différences étaient négligeables en ce qui concerne les pertes et la grandeur du champ visuel. Quatre observateurs ont pris part à de nombreuses mesures.*

La puissance d'un instrument télescopique peut être représentée approximativement sous la forme :

$$L = C\,\Gamma^{1-x}\,D^x \qquad ou \qquad L = C\,\Gamma\,P^x,$$

où C désigne une constante très générale dépendant de la luminance ambiante et des propriétés de l'observateur et de l'instrument, Γ *le grossissement de l'instrument, D le diamètre de l'objectif et P le diamètre de la pupille de sortie de l'instrument. L'exposant x dépend en premier lieu de la luminance ambiante et, dans une plus faible mesure, du contraste de l'objet, de la pupille de sortie de l'instrument, de l'état d'adaptation de l'observateur et des pertes dans l'instrument.*

En moyenne, pour quatre observateurs, pour des pupilles de sortie de diamètre compris entre 1,6 *et* 7,1 *mm, et pour un contraste de l'objet de l'ordre de* — 1, *on a obtenu pour x les valeurs numériques suivantes :*

Luminance ambiante (en asb) :	$10^{-4,5}$	10^{-4}	$10^{-3,5}$	10^{-3}	$10^{-2,5}$	10^{-2}	$10^{-1,5}$	10^{-1}	$10^{-0,5}$	10^{0}	$10^{0,5}$	10^{1}
x :	1,5	1,2	0,9	0,7	0,52	0,48	0,46	0,45	0,42	0,28	0,12	0,0

Dans la région de $10^{-2,5}$ *à* 10^{-1} *asb, où x prend la valeur* 0,5, *l'ancienne formule approximative est confirmée :*

$$L = C\sqrt{F.\ D.}$$

Au-dessous de $10^{-2,5}$ *asb, x croît, c'est-à-dire que l'influence du grossissement sur la puissance de l'instrument baisse tandis que l'influence du diamètre de l'objectif augmente. Au-dessous de* $10^{-3,5}$ *asb, x croît jusqu'à dépasser l'unité. Dans ce domaine, chaque grossissement rendant la pupille de sortie de l'instrument nettement plus petite* (6 *mm) que la pupille de l'œil de l'observateur* (7,4 *mm) apporte une diminution de l'acuité visuelle. Au-dessus de* 10^0 *asb, x se rapproche progressivement de zéro, valeur correspondant à la vision purement diurne, c'est-à-dire que le diamètre de l'objectif est, dans une large mesure, sans influence sur la puissance de l'instrument.*

Ces résultats confirment largement la théorie de la vision télescopique de Kühl, *d'abord valable seulement pour l'observation extrafovéale à* 7°.

Beim Fernrohrsehen ist hauptsächlich die Frage von Bedeutung, in welcher Weise die für einen Fernrohrbenutzer wirksame Leistungsfähigkeit von den Konstruktionsdaten des Fernrohres, also in erster Linie von Objektivdurchmesser und Vergrösserung, abhängt. Besonderes Interesse beansprucht dabei das Gebiet der niedrigen Umfeldleuchtdichten, also das Fernrohrsehen während der Dämmerung und in der Nacht. Zu diesem Fragenkomplex sind in den letzten 30 Jahren über 40 Arbeiten erschienen, und die Meinungen gingen dabei stark auseinander. Während sich in den wissenschaftlichen Untersuchungen immer mehr die Erkenntnis abzeichnete, dass auch im Dämmerungssehen die Fernrohrvergrösserung einen bedeutenden Einfluss auf die Erkennbarkeit von Einzelheiten habe, wurde in den Druckschriften der meisten Fernrohrhersteller die Meinung vertreten, dass für die Beurteilung der Wirksamkeit beim Dämmerungs- und Nachtsehen ausschliesslich die Grösse der Austrittspupille des Fernrohres massgebend sei. Es erschien daher angebracht, diese Frage erneut aufzugreifen und die in Bildung begriffene, einheitliche Auffassung durch möglichst durchsichtige experimentelle Untersuchungen zu erhärten.

(*) Auszug aus der Diplomarbeit von R. Leinhos, eingereicht beim Lehrstuhl für Experimentalphysik an der TH Stuttgart. Eine auszugsweise Veröffentlichung erfolgte bereits durch den Vortrag von H. Köhler zur Tagung der Deutschen *Ges. f. angew. Optik* in Göttingen, 1954 [17].

1. **Die Formulierung des Problems**. — Bei den in Frage stehenden Untersuchungen wird die Aufgabe gestellt, Gesetze für die Abhängigkeit der Fernrohrleistung L von den Konstruktionsdaten des Fernrohrs zu finden. Unter dieser Fernrohrleistung L soll das Verhältnis der Fernrohrsehschärfe S_F zur freiäugigen Sehschärfe S_A verstanden werden, also

$$L = \frac{S_F}{S_A}. \tag{1}$$

Unter den Sehschärfen S_F und S_A wird wie üblich der Kehrwert der in Bogenminuten ausgedrückten Objektgrösse verstanden.

Einen Einblick in die physiologisch-optischen Zusammenhänge liefert der vereinfachte Ansatz von H. Köhler [16, 17], der zunächst einmal wiedergegeben werden soll :

Die Sehschärfe S_A des freien Auges ist darstellbar

als Funktion der Adaptationsleuchtdichte U und des Kontrastes K der Sehzeichen :

$$S_A = F(U, K). \tag{2}$$

Die Funktion F ist monoton wachsend mit der Leuchtdichte und dem Kontrast, ist von Beobachter zu Beobachter verschieden, also von individuellen Grössen abhängig und braucht auch zeitlich nicht konstant zu sein. Vernachlässigt man beim Vorsetzen eines Fernrohrs die Änderung des Adaptationszustandes, so kann man die Fernrohrsehschärfe S_F in der Form ansetzen :

$$S_F = \Gamma \,.\, F\left(\frac{P^2}{P_A^2} \,.\, \delta \,.\, U, K\right) \tag{3}$$

Darin bedeuten :

P den Durchmesser der Fernrohraustrittspupille,

P_A den Durchmesser der Augenpupille (Funktion von U), δ den Durchlassgrad des Fernrohrs.
Da Vergrösserung Γ, Objektivdurchmesser D und Austrittspupille P des Fernrohrs miteinander in der Beziehung

$$\Gamma . P = D \tag{4}$$

stehen, bedeutet Gleichung (3), dass bei festgehaltenem Objektivdurchmesser D und gleicher Leuchtdichte U die Funktion F mit zunehmender Vergrösserung abnimmt, da $(P/P_A)^2 U$ kleiner wird, gleichzeitig aber die Fernrohrsehschärfe S_F linear mit Γ anwächst. Die Frage ist nun, in welchem Helligkeitsbereich der Einfluss von $(P/P_A)^2 U$ den von Γ überwiegt. Die Beantwortung hängt wesentlich vom Charakter der empirischen Funktion F ab. Mit dem Ansatz

$$S_A = C\, U^m \tag{5}$$

erhält man für die Fernrohrleistung L den Ausdruck :

$$L = \frac{S_F}{S_A} = \frac{1}{P_A^{2m}}\, \delta^m\, D^{2m}\, \Gamma^{1-2m}\,. \tag{6}$$

Nimmt m in einem gewissen Leuchtdichtenbereich den Wert 1/4 an, so geht Gleichung (6) in die umstrittene Faustformel

$$L = C . \delta^{1/4} \sqrt{\Gamma . D} \tag{7}$$

über, wobei man P_A als individuelle Konstante mit in den Proportionalitätsfaktor C einbezieht. Dadurch wird die praktische Verwendbarkeit nicht eingeschränkt, da die absolute Grösse von L in der Praxis nicht interessiert, sondern es wichtig ist zu wissen, in welcher Weise für den gleichen Beobachter die Fernrohrleistung von den Konstruktionsdaten abhängt.

In diesem Ansatz sind jedoch ausser den kleinen Vernachlässigungen eine ganze Anzahl physiologischer Effekte nicht erfasst worden, die zum Teil in die Proportionalitätsgrösse C eingehen und somit ziemlich uninteressant sind, zum Teil aber auch die Grösse m und deren Abhängigkeit von der Leuchtdichte beeinflussen. Diesem Umstand ist die besondere Schwierigkeit des gesamten Problems zuzuschreiben.

2. **Historische Bemerkungen.** — Die ersten Veröffentlichungen zu diesem Problem des Fernrohrsehens stammen von GEHLHOFF [8] (1921) sowie von KRÜGER und ZENNEK [18] (1924). Die experimentellen Untersuchungen hierzu waren noch nicht sehr vollkommen in der Versuchstechnik und lieferten lediglich einige qualitative Aussagen über den Vorteil der Fernrohrvergrösserung auch im Dämmerungs- und Nachtsehen. 1926 veröffentlichte KÜHL [19] eine Arbeit, in der er das RICCO'sche Gesetz zugrunde legte in Analogie zur Wahrnehmung von Lichtpunkten, wie es z. B. für den Bereich der Astronomie zutrifft. Die Leistung eines monokularen Fernrohrs ergibt sich danach zu

$$\tilde{L} = \gamma . \delta . \pi/4 . P^2 . \Gamma^2. \tag{8}$$

Unter der Fernrohrleistung $\tilde{L}$ verstand KÜHL bereits damals das Verhältnis einer Grösse (der subjektiven Flächenhelligkeit, nicht der Sehschärfe) bei bewaffnetem Auge zur gleichen Grösse des freien Auges. Der Faktor γ rührt von dem sogenannten Rohreffekt her und hat etwa den Wert 1,4. Bei Anwendung der Gleichung (8) ist zu beachten, dass der Wert P nicht grösser als die jeweils wirksame Augenpupille P_A des Beobachters werden kann, tritt dieser Fall ein, was bei den Fernrohren GALILEI'scher Bauart leicht möglich ist, so ist für P der Wert P_A einzusetzen. Formt man die Gleichung (8) mit der Beziehung (4) um, so ergibt sich :

$$\tilde{L} = \gamma . \delta . \pi/4 . D^2. \tag{9}$$

Das bedeutet, bei vergleichbaren Fernrohren (solchen mit etwa gleichen Verlusten und gleichgrossem Gesichtsfeld) ist die Leistung unabhängig von der Vergrösserung und kann nur durch eine Vergrösserung des Objektivdurchmessers gesteigert werden. KÜHL folgerte daraus einen Vorteil der « lichtstarken » GALILEI-Gläser gegenüber den Prismengläsern, zu denen nur ältere Personen wegen ihren kleineren Augenpupille übergehen müssten.
Bald zeigte sich jedoch, dass hiermit das Problem noch nicht gelöst war. Bereits ebenfalls 1926 gab KÜHL [20, 21] eine andere, auf die Sehschärfe bezogene Leistungsformel an :

$$L = \Gamma (P/P_A)^{2/3} . (\gamma . \delta)^{1/3} \tag{10}$$

in der die Objektivöffnung schon weniger ins Gewicht fällt zu Gunsten der Vergrösserung. Wieder mit (4) umgeformt erhält (10) die Gestalt

$$L = \left(\frac{\gamma . \delta}{P_A^2}\right)^{1/3} . D^{2/3} \Gamma^{1/3}. \tag{11}$$

Die rein theoretisch gewonnenen Werte der Exponenten ändert KÜHL [22, 24] auf Grund der Messun-

gen von Löhle [33] in 1/2, sodass die auch später weiteren Kreisen bekanntgewordene Faustformel

$$L = C . \sqrt{\Gamma . D} \tag{12}$$

entstand, die sich jedoch keineswegs durchsetzte, vielmehr lieferten andere Arbeiten zuweilen wesentlich andere Ergebnisse. Die experimentellen Untersuchungen von Hauser und Mohr [13] zeigen noch bei einer Beleuchtungsstärke von 0,03 Lux einen Einfluss der Vergrösserung, wie er kaum beim Tagessehen zu erwarten ist. Weitere Arbeiten stammen von Nagel und Klughardt [41, 45], Lüdemann [38], Noetzli [46], Löhle [35-37], Wempe [60], Brunnckow, Reeger und Siedentopf [52], Münster [40] und anderen. Besondere Beachtung verdienen die Untersuchungen von Kühl [30, 31] und von Berek [2,3]. Beide Autoren bemühen sich, geschlossene Theorien des Fernrohrsehens aufzustellen, ihre Ergebnisse divergieren jedoch stark. Trotz ihrer Bedeutung für das Folgende kann auf diese Theorien hier nicht ausführlicher eingegangen werden, eine kurze Zusammenfassung erschien jedoch in [17].

Die Theorie von Kühl stellt im wesentlichen empirisch gefundene Gesetzmässigkeiten dar. Die experimentelle Grundlage bildeten Messungen der Unterschiedsschwelle an kreisförmigen Objekten mit freiem und bewaffnetem Auge.

Die Theorie von Berek unterscheidet sich von der Kühl's grundsätzlich dadurch, dass Berek nur für das freie Sehen auf experimentelle Befunde zurückgreift, den Übergang zum Fernrohrsehen aber rein theoretisch vornimmt und somit alle physiologischen Einflüsse unbeachtet lässt.

Den Verlauf der Fernrohrleistung L verschiedener Feldstecher nach beiden Theorien zeigen die Abbildungen 1 und 2. Man sieht, dass nach Kühl ein Ein-

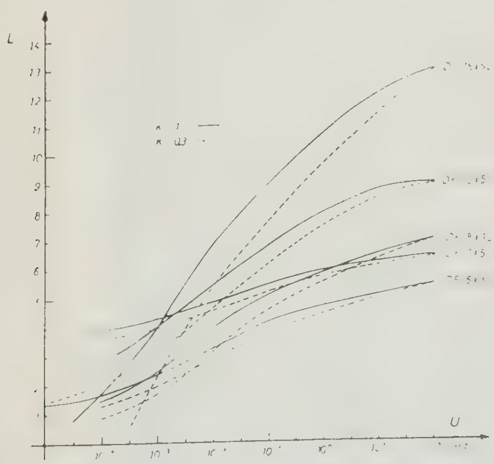

Abb. 1. — Fernrohrleistungen nach Kühl.

fluss der Vergrösserung bei geringen Umfeldleuchtdichten noch vorhanden ist, während bei Berek ein solcher im untersuchten Bereich nur bei Nichtaus-

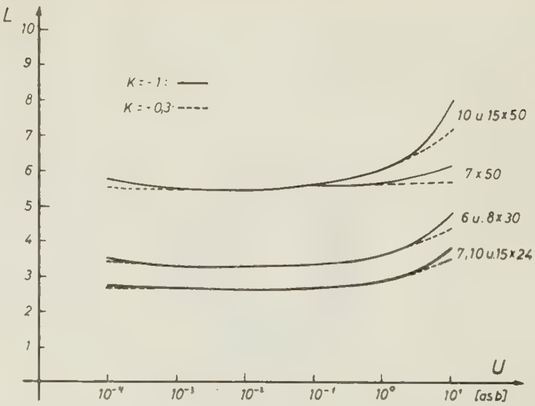

Abb. 2. — Fernrohrleistungen nach Berek.

nutzung der Austrittspupille auftreten kann, sonst jedoch die Fernrohrleistung nur vom Objektivdurchmesser abhängt. Eine Entscheidung, ob die eine oder andere Theorie richtig ist, ist ohne weitere experimentelle Untersuchungen sehr schwer; denn um exakte Aussagen zu erhalten, hat Kühl die Versuchsbedingungen sehr spezialisiert. So wurde z. B. grundsätzlich 7° ausserhalb der Fovea beobachtet, während das völlig freie Auge sich den günstigsten Netzhautort selbst wählt. Eine Verallgemeinerung der Kühl'schen Ergebnisse scheint daher nicht zulässig zu sein. Durch den komplizierten Aufbau seiner Gleichungen und die zahlreichen individuellen Konstanten ist eine Übersicht über die wirksamen Grössen sehr erschwert und schliesslich kann nur für 7° extrafoveales Sehen Übereinstimmung mit dem tatsächlichen Sachverhalt erwartet werden. Gegen die Theorie von Berek sprachen zwar viele der bereits veröffentlichten experimentellen Ergebnisse, jedoch sind auch diese oft durch Eigenheiten in der Versuchsgestaltung vorbelastet, und die experimentellen Schwierigkeiten sind so beträchtlich, dass eine so übersichtliche Theorie wie die von Berek recht bestechend wirkt. Eine Klärung der Frage sollte durch die nun mitzuteilenden Messungen gewonnen werden.

3. **Die Versuchsanordnung.** — Die experimentellen Untersuchungen sollten als unmittelbare Ergebnisse in möglichst vielen Einzelfällen Fernrohrsehschärfen liefern. Auf die Bestimmung von Fernrohrleistungen wurde von vornherein ausdrücklich verzichtet, weil die Unsicherheit in der Bestimmung der Fernrohrleistung notgedrungen grösser sein muss als die der Fernrohrsehschärfe, da der Fehler in der Bestimmung der Sehschärfe im freiäugigen Sehen zusätzlich in der Ermittlung der Fernrohrleistung eingeht. Für die vorwiegende praktische Zielsetzung der Untersuchung ist der Absolutwert der Fernrohrleistung unwesentlich.

Als Testobjekte wurden ausschliesslich Landolt-sche Ringe mit den international festgelegten Abmes-

sungen herangezogen (Abb. 3). Damit wurde die Grundlage der experimentellen Untersuchungen eine reine Sehschärfenmessung, nämlich die Ermittlung

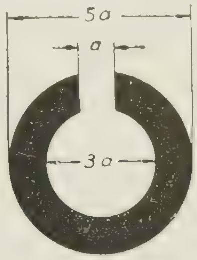

ABB. 3. — LANDOLT'scher Ring.

derjenigen Grösse der Lücke im LANDOLTschen Ring, die gerade noch erkannt werden kann.

Ein Schema der Messanordnung zeigt Abbildung 4.

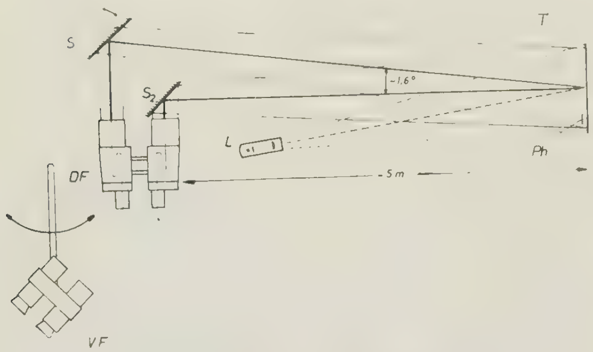

ABB. 4. — Schema der Versuchsanordnung.

Über die Spiegel S_1 und S_2 wurde die Testtafel T in 5 m Abstand beobachtet. An den Spiegeln waren Justiermöglichkeiten vorgesehen, um für jeden Feldstecher die durch den endlichen Objektabstand bedingte Konvergenz der optischen Achsen in Parallelität umzuwandeln, wie es dem normalen Justierzustand eines Feldstechers entspricht. Die Kontrolle auf Parallelität erfolgte vor jeder Messreihe durch das vorschwenkbare Vorsatzfernrohr VF. Hierdurch wird eine in der Literatur bisher nicht erwähnte Fehlerquelle ausgeschaltet; denn während im Tagessehen selbst bei Konvergenzen beträchtlicher Grösse mühelos Fusion erzielt wird, ist es zu bezweifeln, dass im Dämmerungs- und Nachtsehen die Anregungsenergie ausreicht, um den Fusionsapparat in Tätigkeit zu setzen. Dies ist sicher nicht der Fall, wenn es sich um Beobachtungen in Schwellennähe handelt. Ausserdem sind weitere Komplikationen dadurch zu erwarten, dass mit der Fusionsbewegung eine Akkommodation gekoppelt ist. Im Endergebnis würde man also bei einem Verzicht auf die Ausjustierung der Konvergenz zu niedrige Sehschärfen erhalten; und zwar um so niedriger je höher die Fernrohrvergrösserung ist.

Der gesamte Versuchsaufbau war verstellbar, um dem Beobachter eine bequeme Körperhaltung zu ermöglichen, den Aufbau an der Beobachtungsseite zeigen die Abbildungen 5 und 6.

Die starke Variation der Sehschärfe mit der Beleuchtungsstärke erfordert Sehzeichen mit Testgrössen zwischen 3 Bogensekunden und 24 Bogenminuten! Bei einem Beobachtungsabstand von 5 m hat der kleinste LANDOLTring einen Durchmesser von 0,36 mm

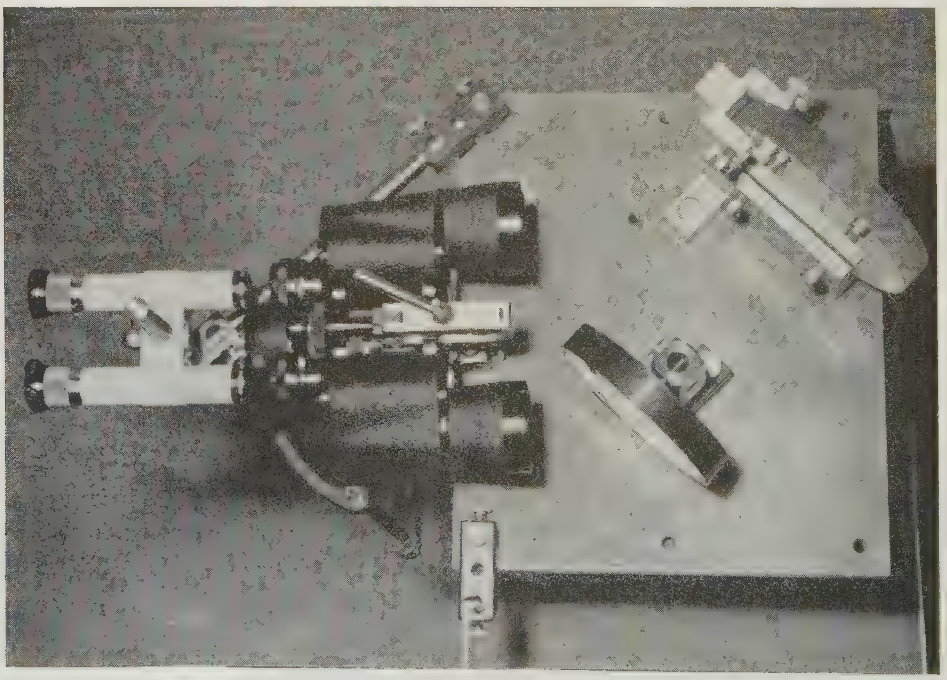

ABB. 5. — Ansicht der Versuchsanordnung von oben.

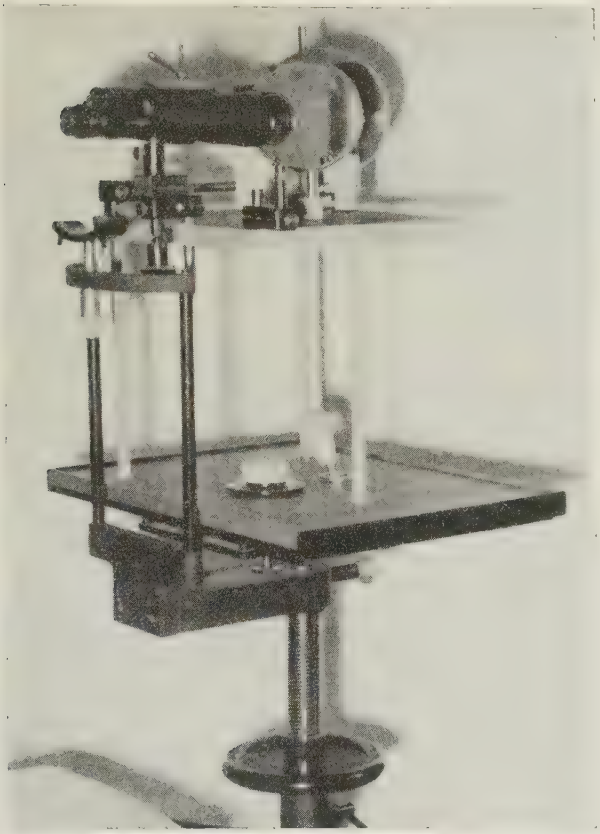

ABB. 6. — Ansicht der Versuchsanordung von der Seite.

der grösste einen solchen von 174 mm. Der Vergrösserungsfaktor von einem LANDOLTring zum nächsten beträgt etwa 1,25, die kleineren, mit einer Schlitzbreite von weniger als einer Bogenminute, wurden auf einer drehbaren Tafel nach Art der Abbildung 7

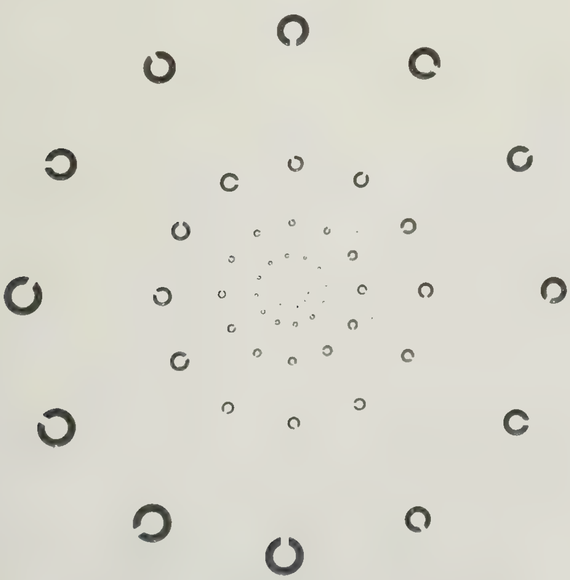

ABB. 7. — Anordnung der LANDOLTringe.

angeordnet. Die grösseren LANDOLTringe konnten einzeln auf die gleiche Tafel aufgesteckt und gedreht werden.

Die Herstellung der Testfiguren erfolgte auf photographischem Wege. Es wurden Ringe mit zwei verschiedenen Kontrastwerten verwendet. Die Bestimmung des Remissionsvermögens des weissen Untergrundes sowie des Kontrastes der Sehzeichen erfolgte mit dem Elektrokolorimeter (Elko II) der Firma Carl ZEISS [35]. Für den Kontrast

$$K = \frac{r_i - r_u}{r_u}$$

(r_i = Remissionsvermögen der dunklen Fläche, r_u das des weissen Umfeldes)

ergab sich für die schwarzen Ringe $K = -0{,}96$, für die grauen Ringe etwa $-0{,}25$.

Die Beleuchtung der Sehprobentafel erfolgte durch eine abgeänderte Handleuchte der Firma Carl ZEISS. Die Lichtschwächung sollte rasch und reproduzierbar erfolgen, daher wurde auf eine kontinuierliche Lichtschwächung verzichtet und eine stufenweise Variation der Beleuchtungsstärke vorgesehen. Diese erfolgte durch Vorsetzen von Grauschichtfiltern, die neuerdings mit einer bemerkenswerten Unabhängigkeit von der Lichtwellenlänge von R. KOOPS bei der Firma Carl ZEISS entwickelt worden sind. Abbildung 8 zeigt zwei charakteristische Durch-

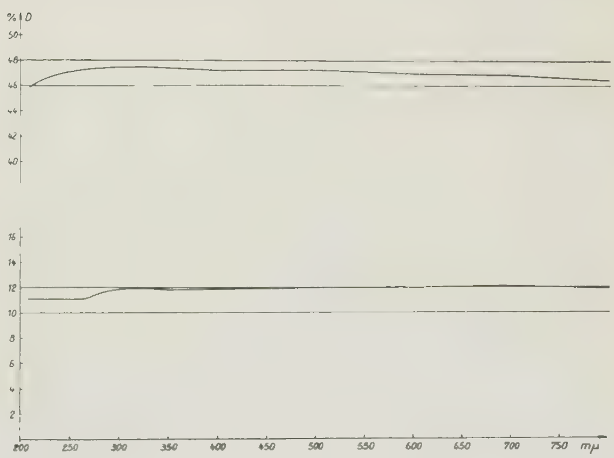

ABB. 8. — Durchlässigkeiten von Grauschichtfiltern.

lasskurven solcher Filter. Die Anordnung war so getroffen, dass der gesamte Variationsbereich der Beleuchtungsstärke von $1 : 10^5$ in 10 nahezu gleiche Stufen aufgeteilt wurde. Um Störungen durch das an den Oberflächen der Filter reflektierte Licht zu vermeiden, wurden die einzelnen Filter schräg in den Strahlengang gebracht, wie es Abbildung 9 zeigt. Als Lichtquelle diente eine Wolfram-Glühlampe mit einer Brennspannung von 6 Volt und einer Leistungsaufnahme von 30 Watt. Die Lampe hatte eine Farbtemperatur von etwa 2850°K. Die Farbtemperatur

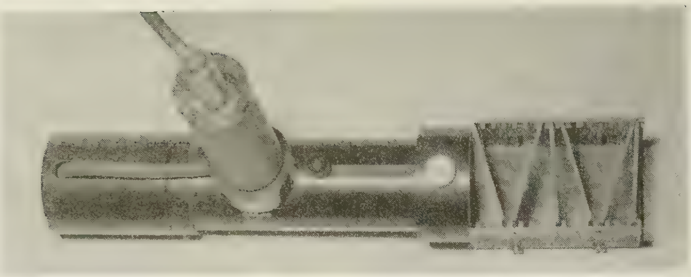

ABB. 9. — Beleuchtungseinrichtung.

liegt somit innerhalb derjenigen Farbtemperaturen, die für die freie Natur angegeben werden. (Bedeckter Himmel, leichte Dämmerung: 6800°K, Mondscheinbeleuchtung 4100°K, mondlose Nacht 2100°K [9]).

Die Lampe wurde über Transformator und magnetischen Spannungsgleichhalter aus dem Lichtnetz betrieben. Die Spannungsschwankungen waren kleiner als 1%. Die Beleuchtungsstärke auf der Sehzeichentafel wurde bei den höheren Beleuchtungsstärken mit einem nachgeeichten, grossflächigen Photoelement bestimmt. Die photometrische Kontrolle der Beleuchtungsstärke erstreckte sich nur über 2,5 Zehnerpotenzen. Für die niedersten Beleuchtungsstärken konnte nur der rechnerische, aus den Filterdurchlässigkeiten bestimmte, Wert zugrunde gelegt werden. Der Abfall der Beleuchtungsstärke von der Mitte zum Rand der Sehzeichentafel betrug atwa 15%.

Als Fernrohre wurden serienmässige Feldstecher 6- und 8-facher Vergrösserung mit 30 mm Objektivdurchmesser und 7-, 10- und 15-facher Vergrösserung mit 50 mm Objektivdurchmesser verwendet. Ausser dem Feldstecher 6 × 30 wurden die Feldstecher sowohl mit voller Objektivöffnung als auch mit vorgesetzten Objektivblenden verwendet. Die Durchmesser der Objektivblenden waren so gewählt, dass sich mehrere Fernrohre ergaben, für die das Produk $\Gamma . D$ den gleichen Wert hat.

4. **Die Messungen**. — Die zu ermittelnden Fernrohrsehschärfen sollten ausschliesslich bei binokularer Fernrohrbetrachtung, im übrigen jedoch völlig ungezwungen gewonnen werden. Die Beobachtungsbedingungen sollten möglichst den natürlichen Verhältnissen entsprechen. Die von KÜHL angewandte Methode, durch ein rotes Fixierlicht immer die gleiche Netzhautstelle zur Beobachtung zu verwenden (bei KÜHL 7° extrafoveal) wurde ausdrücklich vermieden, da diese Beobachtungsart zweifelsohne nicht den natürlichen Verhältnissen entspricht. Vielmehr wählt das Auge den günstigsten Netzhautort selbst, dieser wandert bekanntlich mit abnehmender Beleuchtungsstärke von der Fovea nach der Peripherie der Netzhaut.

Die endgültigen Messungen wurden lediglich mit vier im Fernrohrsehen geübten Beobachtern durchgeführt, nachdem Voruntersuchungen gezeigt hatten, dass die Messungen ungeübter Beobachter mit wesentlich stärkeren Streuungen behaftet sind.

Vor jeder Messreihe richtete der Beobachter den Feldstecher ein, besonders geachtet wurde auf die binokulare Justierung und auf entspannte Augenmuskulatur, letzteres wurde durch kurzzeitiges Vorbeisehen am Feldstecher auf einen schwarzen Vorhang kontrolliert. War hiernach beim Einblick in den Feldstecher das Bild sofort wieder scharf, so war keine merkliche Anspannung der Augenmuskulatur vorhanden. Dieses Verfahren stellte sich als das einzige heraus, das die Nachtmyopie wenigstens angenähert zu berücksichtigen gestattet. Die hierbei eingestellten Refraktionswerte waren 0 bis -2 Dioptrien von der jeweiligen Fernpunktsrefraktion verschieden, wie es der derzeitigen Anschauung über die Nachtmyopie entspricht [5, 47, 48]. Eine Betätigung der Dioptrienverstellung während der Beobachtung bei den niederen Leuchtdichten führte zu völlig unzuverlässigen Einstellungen und musste unbedingt vermieden werden.

Nach einer Adaptationszeit von etwa 40 Minuten bei völliger Dunkelheit wurde mit den Messungen bei der geringsten Beleuchtungsstärke begonnen. Hierbei trat sehr häufig und sehr deutlich eine eigenartige Erscheinung auf, die als eine Art Anlaufeffekt beim Sehen in der Nähe der Schwellenleuchtdichte anzusehen ist und hier die Messung besonders unsicher macht. Kam nämlich der Beobachter aus dem Dunkelraum und nahm an der Apparatur Platz, so konnte er die Lücke in einem LANDOLTring, dessen Grösse etwa dem Grenzwinkel entsprach, beinahe mühelos und mehrmals (bis zu 4-mal) richtig erkennen und ansagen, dann trat aber plötzlich ein Zustand ein, zu dem der Beobachter z. B. äusserte : « Ich sehe überhaupt nichts mehr, ist denn noch ein Ring da ? » Erst nach einer Wartezeit von einigen (ca. 3-5) Minuten wurde wieder ein Lichtreiz (des Umfeldes) wahrgenommen, die ursprüngliche Sehschärfe aber nicht wieder erreicht, sondern es musste dann ein LANDOLTring der nächsten oder übernächsten Grösse angebracht werden, wenn nicht überhaupt zur nächsthöheren Umfeldleuchtdichte übergegangen werden musste. Diese Erscheinung wurde zur gleichen Zeit in einer Veröffentlichung von SACHSENWEGER [50] in ganz ähnlicher Weise für freiäugiges Sehen beschrie-

ben, sie scheint also bisher nicht allgemein bekannt gewesen zu sein. Vermutlich ist der Adaptationszustand bei völliger Dunkelheit doch wesentlich von dem bei gerade wahrnehmbarer Helligkeit einer grösseren Fläche verschieden, wird aber infolge der sehr geringen Lichtenergie verhältnismässig langsam geändert.

Im weiteren verlief die Messung so, dass die Ringgrösse schrittweise verkleinert wurde, bis der Grenzwinkel, der die Sehschärfe definiert, erreicht war. Am Anfang der Untersuchungen wurden zehn Angaben verlangt, von denen acht richtig sein mussten, um diese Ringgrösse noch als erkannt werten zu können, doch zeigte sich bald, dass hierdurch die Messungen zeitlich zu sehr ausgedehnt wurden und Ermüdungserscheinungen auftraten, da ja stets zwei Kontraste und mindestens zwei verschiedene Feldstecher gemessen wurden. Vielmehr stellte sich heraus, dass bei einiger Übung schon aus bedeutend weniger Ansagen ein Urteil gefällt werden konnte. In der Regel wurde daher bei vier richtigen Angaben der entsprechende Ring als erkannt gewertet. War bei den ersten vier Ansagen eine falsch, wurde eine fünfte oder auch sechste gefordert, in seltenen Fällen mehr. Die Zeit zum Erkennen eines Ringes wurde grundsätzlich nicht begrenzt, sie betrug normalerweise wenige (2 bis 4), höchstens jedoch etwa 20 Sekunden. Starres Fixieren länger als etwa 5 Sekunden erwies sich oft bereits als zwecklos, da infolge Lokaladaptation die Unterschiedsempfindlichkeit stark vermindert und ein Erkennen der Ringlücke unmöglich wird. Der von Schober [54] beschriebene Effekt, dass die Lücke im Landoltring häufiger als der statistischen Verteilung entspricht, um 180° verdreht angegeben wird, trat auch hier in Erscheinung. Diese speziellen Fehlangaben wurden nicht so stark bewertet, so dass beispielsweise ein Satz von sechs Ansagen bei denen vier richtig, die zwei übrigen jedoch um 180° falsch waren, noch als genügend notiert wurde. Wurde eine Ringgrösse erreicht, bei welcher nicht genügend richtige Angaben mehr gemacht werden konnten, wurde eine höhere Beleuchtungsstärke gewählt, oder zu der anderen Kontraststufe oder auch zu einem anderen Feldstecher übergegangen.

Das eigentliche Messprogramm wurde in der Regel so durchgeführt, dass nach einigen Messreihen zur Übung, die nicht gewertet wurden, zunächst die drei grossen Feldstecher jeder einzeln mit Blendenwechsel gemessen wurden und dann durch Kombination verschiedener Gläser die Verbindung untereinander und zu den kleinen Feldstechern hergestellt wurde. Dabei wurden die Kombinationen meist so gewählt, dass sich nach der Faust-Formel für die Leistung in der Dämmerung $L = C\sqrt{\Gamma\, D}$ gleichgrosse Beträge ergaben.

5. **Messergebnisse**. — Sämtliche für die späteren Auswertungen verwendeten Ergebnisse eines Beobachters (O) sind in den folgenden Tabellen 1 und 2 wiedergegeben. Sie sollen in erster Linie einen Eindruck über die auftretenden, unvermeidlichen Streuungen geben. Die letzte Spalte in den beiden Tabellen gibt den Fernrohrtyp an, der in einer Sitzung zusammen mit dem in der ersten Spalte angeführten Fernrohr gemessen wurde. Die Messungen an Sehzeichen mit verschiedenen Kontrasten wurden für je einen Fernrohrtyp ausschliesslich in ein und derselben Sitzung durchgeführt. Einige Ausnahmen bildeten lediglich einige Messreihen des Beobachters O.

Die subjektive Messgenauigkeit kann mit etwa einer Grössenstufe in den Landoltringen, also etwa 0,1 im Logarithmus der Sehschärfe angegeben werden. Eine klare Entscheidung ob z. B. während einer Messung 30 Sekunden oder 38 Sekunden dem richtigen Grenzwinkel entsprechen, ist nicht möglich. Zuweilen treten jedoch auch grössere Streuungen in der Sehschärfenangabe auf, die durch verschiedenen Adaptationszustand an verschiedenen Messtagen bedingt sein können. Es ist daher kaum anzunehmen, dass durch eine feinere Unterteilung der Sehzeichengrösse, die den Messaufwand erheblich erhöht hätte, eine merkliche Herabminderung der Streuungen erzielt worden wäre. Aus den Tabellen 1 und 2 sind zwei charakteristische Messreihen in Abbildung 10 und 11 in doppelt logarithmischem Massstab dargestellt.

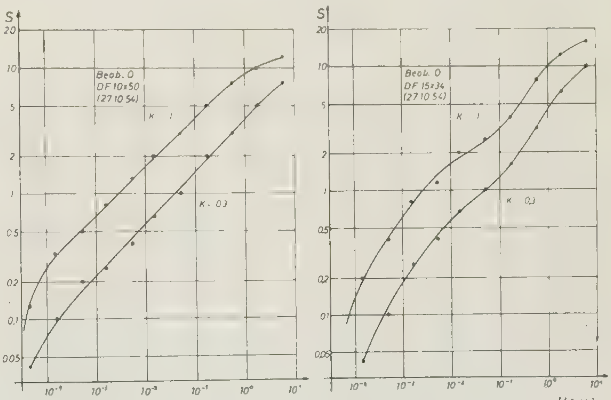

Abb. 10, 11. — Verlauf der Fernrohrsehschärfe (gemessen).

Die angegebenen Werte der Leuchtdichte stellen die um die Verluste an den Spiegeln verminderte Leuchtdichte auf der Testtafel dar.

Die Krümmung in den Kurven der Abbildung 11 bei 10^{-1} asb wurde in vielen Fällen beobachtet. Sie ist zwar nicht immer reproduzierbar, scheint jedoch reell zu sein und entspricht der Stelle, wo das Auge vom peripheren Sehen zum fovealen Sehen übergeht. Die Tatsache, dass Abweichungen vom linearen Kurvenverlauf im besonders starken Masse bei ungeübten Beobachtern auftreten, deutet darauf hin, dass durch Üben ein gleichmässiger Übergang vom peripheren zum fovealen Sehen erzielt werden kann. Immerhin ist bemerkenswert, dass gleichzeitig vom gleichen Beobachter eine fast lineare Kurve, wie sie in Abbildung 10 wiedergegeben ist, erhalten werden konnte. Einzelhei-

TABELLE 1

Sehscharfenmesswerte des Beobachters 0, Kontrast = — 1

Leuchtdichte U DF	Tag	4,7 10^{-5}	1,6 10^{-4}	5,2 10^{-4}	1,7 10^{-3}	5,6 10^{-3}	1,6 10^{-2}	5,4 10^{-2}	1,8 10^{-1}	6,0 10^{-1}	1,9 10^{0}	6,3 10^{0}	[asb] mit DF
15×50	11.5.	12′	4′	1.5′	1′	38″	30″	24″	12″	8″	5″	4″	15×24
	18.5.	10′	4′	1.5′	1′	38″	30″	24″	16″	8″			×24;34
	6.9.	8′	2.5′	1.5′	1′	38″	24″	16″	12″	6″	5″	4″	15×24
15×34	8.9.	20′	6′	2′	1.25	45″	30″	24″	16″	8″	5″	4″	
	18.5.	—	5′	2.5′	1.25	1′	38″	27″	18″	10″			×24;50
	27.10.	—	8′	3′	1.25	53″	30″	24″	16″	8″	5″	4″	10×50
15×24	11.5.	—	10′	4′	1.5′	1′	45″	30″	20″	12″	6″	4″	15×50
	18.5.	—	8′	4′	1.5′	1′	38″	30″	20″	10″			×50;34
	6.9.	—	8′	3′	1.5′	1′	38″	24″	16″	8″	6″	4″	15×50
	25.10.	—	10′	3′	1.25	1′	38″	30″	16″	12″	6″	4″	7×50
10×50	14.5.	8′	3′	1.5′	1.25	45″	38″	24″	14″	10″	8″	6″	×24;34
	10.9.	8′	4′	2′	1′	45″	30″	24″	16″	8″	6″	5″	10×34
	27.10.	8′	3′	2′	1.25	45″	30″	20″	12″	8″	6″	5″	15×34
10×34	14.5.	20′	4′	2.2′	1.25	1′	45″	30″	16″	10″	8″	6″	×24;50
	10.9.	12′	4′	2′	1.25	1′	38″	30″	16″	10″	6″	5″	10×50
	23.10.	16′	4′	2.5′	1.5′	1′	38″	30″	16″	10″	6″	5″	7×50
10×24	14.5.	—	8′	3′	1.7′	1.25	1′	38″	20″	16″	8″	6″	×50;34
	26.10.	24′	6′	3′	2′	1.25	45″	38″	20″	12″	6″	5″	8×30
7×50	15.5.	8′	3′	2′	1.25′	1′	45″	30″	20″	12″	10″	8″	×24;34
	15.9.	6′	3.5′	2′	1.25	1′	45″						7×34
	20.10	6′	4′	2′	1.5′	1′	45″	30″	20″	10″	8″	6″	7×24
	23.10.	6′	3.5′	2′	1.5	1′	45″	30″	16″	10″	8″	6″	10×34
	25.10.	6′	4′	2′	1.5	1′	45″	24″	16″	10″	8″	6″	15×24
7×34	15.5.	12′	4′	2.5′	1.5′	1′	53″	38″	20″	12″	10″	8″	×24;50
	15.9.	10′	4′	2.5′	1.5′	1.25′	45″	30″	20″	10″		8″	7×50
	21.10.	8′	4′	2.5′	1.5′	1.25′	45″	38″	16″	12″	8″	7″	8×30
7×24	15.5.	16′	6′	3′	2′	1.25	1′	38″	24″	16″	10″	8″	×50;34
	20.10.	20′	6′	3′	2′	1.25′	53″	45″	24″	16″	10″	8″	7×50
8×30	17.5.	16′	5′	2.5′	1.5′	1′	45″	38″	20″	12″	10″	8″	8×22
	18.5.			3′	1.5′	1.25′	45″	38″	24″	16″	10″	8″	6×30
	7.9.	12′	4′	2.5′	1.5′	1.25′	1′	30″	20″	12″	8″	6″	6×30
	21.10.	16′	5′	2.5′	2′	1.25′	53″	30″	16″	10″	8″	6″	7×34
	26.10.	16′	4′	2.5′	1.5′	1′	45″	30″	16″	12″	8″	6″	10×24
8×22	17.5.	—	8′	3′	2′	1.25′	1′	38″	24″	12″	10″	8″	8×30
	30.10.	20′	8′	4′	2′	1.25′	1′	38″	20″	16″	8″	6″	6×30
6×30	17.5.	12′	5′	2.5′	1.5′	1.25′	1′	45″	30″	16″	10″	8″	
	18.5.			3′	2.5′	1.5′	1.25	45″	30″	20″	12″	10″	8×30
	7.9.	8′	5′	2.5′	2′	1.25	1′	38″	24″	16″	12″	10″	8×30
	30.10.	12′	6′	3′	2′	1.25	1′	38″	20″	16″	12″	10″	8×22

ten in der Messung, wie die eben geschilderte, können natürlich nicht verfolgt werden, auch wenn die dadurch bedingten Streuungen nicht unerheblich sind. Man musste sich also von vornherein damit abfinden, dass derartige Unterschiede in der später anzuwendenden Mittelwertbildung untergehen. In der Abbildung 12 sind für den Beobachter L die Sehschärfen aller benutzten Feldstechertypen (ohne Blenden) dargestellt, um einen Überblick über die Unterschiede zwischen verschiedenen Fernrohren zu geben. Am oberen Kurvenende, das bereits im Tagessehen liegt, wird die Sehschärfe im wesentlichen durch die Fernrohrvergrösserung bestimmt. DF 8 × 30 ist DF 7 × 50 deutlich überlegen, wenn auch der Unterschied in der Abbildung 12 infolge der verhältnismässig grossen Stufung der Sehschärfe etwas zu gross ausgefallen ist. Für hohe Umfeldleuchtdichten strebt nämlich die Fernrohrsehschärfe einem Grenzwert zu, der dem Wert der Sehschärfe im freiäugigen Sehen multipliziert mit der Fernrohrvergrösserung entsprechen müsste, tatsächlich liegen die Fernrohrsehschärfen jedoch stets etwas niedriger [52]. Dividiert man in Abbildung 12 die Werte für 6,3 asb durch die Fernrohrvergrösserung, so kommt man auf eine freiäugige Sehschärfe von ungefähr 0,87, in einem Nebenversuch wurde in Übereinstimmung damit 0,75 gemessen.

Bei verminderter Umfeldhelligkeit zeigt sich eine Überlegenheit der Fernrohre mit stärkerer Vergrösserung bei gleicher Objektivöffnung bis herab zu

TABELLE 2

Sehschärfenmesswerte des Beobachters O, Kontrast = — 0,3

Leuchtdichte U		4,7 10^{-5}	1,6 10^{-4}	5,2 10^{-4}	1,7 10^{-3}	5,6 10^{-3}	1,6 10^{-2}	5,4 10^{-2}	1,8 10^{-1}	6,0 10^{-1}	1,9 10^{0}	6,3 10^{0}	[asb] mit DF
DF	Tag												
15×50	26.7.	—	20′	5′	3′	2′	1.25′	45″	30″	16″	11″	8″	15×24
	6.9.	—	12′	6′	3′	2′	1′	45″	24″	12″	8″	6″	15×24
15×34	8.9.	—	24′	10′	4′	2.5′	1.25′	53″	38″	20″	10″	7″	
	27.10.	—	24′	12′	4′	2.5	1.5′	1′	38″	20″	10″	6″	10×50
15×24	26.7.	—	—	12′	5′	4′	2′	1′	45″	30″	12″	8″	15×50
	6.9.	—	—	16′	6′	4′	1.5′	1′	45″	24″	12″	8″	15×50
	25.10.	—	—	12′	5′	3′	1.25′	1′	45″	24″	16″	8″	7×50
10×50	27.7.	—	16′	6′	4′	2.5	1.25	1′	38″	20″	16″	10″	10×24
	10.9.	—	8′	5′	3′	2′		45″	30″	20″	12″	10″	10×34
	27.10.	24′	10′	5′	4′	2.5	1.5′	1′	30″	20″	10″	8″	15×34
10×34	10.9.	—	12′	8′	4′	2.5	1.5′	1′	38″	24″	16″	10″	10×50
	23.10.	—	16′	8′	4′	2.5	1.5′	1.25	38″	24″	14″	10″	7×50
10×24	27.7.	—	—	10′	5′	3′	2.5′	1.5′	1′	30″	20″	12″	10×50
	26.10.	—	20′	10′	6′	4′	2.5′	1.5′	53″	24″	16″	10″	8×30
7×50	26.7.	—	10′	5′	4′	2.5′	2′	1.25	45″	24″	18″	12″	7×24
	15.9.	16′	10′	6′	4′	2.5′	1.25′						7×34
	20.10.	24′	10′	5′	4′	3′	1.5′	1′	38″	24″	16″	10″	7×24
	23.10.	20′	8′	5.5	4′	3′	2′	1.25	38″	30″	16″	12″	10×34
	25.10.	24′	12′	6′	4′	2.5′	1.5′	1′	38″	24″	12″	10″	15×24
7×34	15.9.	—	12′	8′	5′	3′	1.5′	1.25	38″	24″	16″	12″	7×50
	21.10.	24	12′	8′	5′	3.5′	2′	1.25	38″	24″	16″	16″	8×30
7×24	26.7.	—	—	8′	6′	4′	2.5′	1.5′	1′	30″	20″	16″	7×50
	20.10.	—	20′	8′	5′	4′	2.5′	1.5′	1′	30″	20″	12″	7×50
8×30	27.7.	—	16′	10′	5′	3′	2.5′	1′	45″	24″	16″	12″	6×30
	7.9.	—	16′	10′	4′	3′	2′	1′	45″	24″	16″	12″	6×30
	21.10.	—	24′	8′	5′	4′	2′	1.25	45	24″	20″	12″	7×34
	26.10.	—	12′	8′	5′	3′	2.5′	1.25	45″	24″	16″	12″	10×24
8×22	30.10.	—	—	16′	6′	4′	2.3′	1.5′	45″	30″	20″	12″	6×30
6×30	27.7.	—	16′	10′	5′	3′	2.5′	1′	45″	30″	24″	16″	8×30
	7.9.	—	16′	10′	5′	3′	2.5′	1.25	45″	30″	20″	16″	8×30
	30.10.	—	16′	8′	6′	4′	2.5′	1.25	45″	30″	24″	16″	8×22

einer Leuchtdichte von etwa 5.10^{-4} asb, lediglich im Übergangsgebiet vom peripheren zum fovealen Sehen holt das Fernrohr geringer Vergrösserung ein solches stärkerer Vergrösserung etwas ein, wird diesem aber allenfalls gleichwertig, jedoch nicht überlegen. Dieser physiologisch bedingte Effekt wird in der Auswertung später noch wesentlich deutlicher hervortreten. Im mittleren Gebiet, also von 10^{0} — 10^{-3} asb ist selbstverständlich der Objektivdurchmesser in steigendem Masse wirksam, da er die Beleuchtungsstärke auf der Netzhaut und damit den günstigsten Netzhautbereich festlegt. Ohne weiteres ist verständlich, dass die Leistung des DF 8 × 30 hinter derjenigen des DF 7 × 50 zurückbleibt.

Geht man zu noch geringeren Umfeldleuchtdichten über, so schneiden sich die Sehschärfenkurven für Fernrohre gleicher Objektivöffnung ungefähr bei 2.10^{-4} asb, die Fernrohrleistung wird von der Vergrösserung scheinbar unabhängig, da deren Einfluss in diesem Gebiet durch Null geht und das Vorzeichen wechselt. Bei weiterer Verminderung der Leuchtdichte fällt die Sehleistung mit stärkerer Vergrösserung schneller, ein Fernrohr geringerer Vergrösserung ist einem solchen stärkerer deutlich überlegen.

Für den Kontrast -0,3 ergibt sich grundsätzlich der gleiche Verlauf der Sehschärfen, diese liegen jedoch alle etwa um einen Faktor 3 niedriger, lediglich im Tagessehen verringert sich dieser Unterschied allmählich, die wie eben ermittelte freiäugige Sehschärfe beträgt noch 1,44. Der Vorteil einer stärkeren Vergrösserung ist nicht so gross wie bei kontrastreichen Objekten, die Sehschärfenkurven liegen dichter zusammen und laufen den mit grossem Kontrast gewonnenen im ganzen untersuchten Bereich nahezu parallel.

In der folgenden Abbildung 13 ist der Einfluss der Objektivöffnung auf die Sehschärfe bei einem bestimmten Feldstecher (DF 15 × 50) veranschaulicht. Bei anderen Fernrohren ergibt sich ein ganz ähnlicher Verlauf. Obgleich die einzelnen Kurven in nahezu gleichbleibendem Abstand einander parallel verlaufen, von Messungenauigkeiten abgesehen, ist natürlich

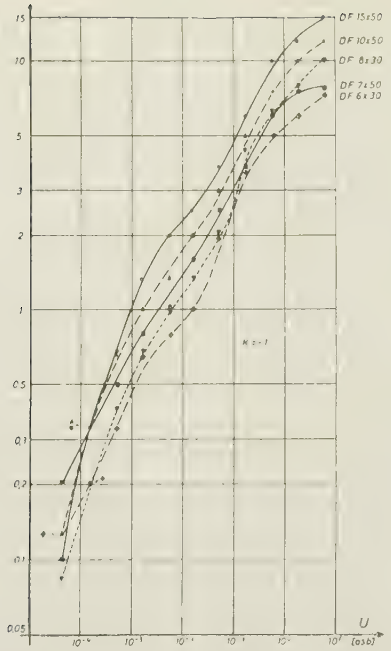

Abb. 12. — Gemessene Fernrohrsehschärfen verschiedener Feldstecher

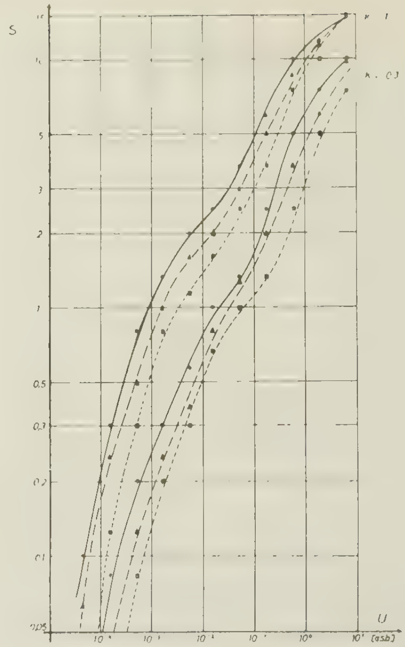

Abb. 13. — Gemessene Fernrohrsehschärfen der Feldstecher 15 × 50 (——), 15 × 34 (— — —) und 15 × 24 (- - - -).

nicht zu übersehen, dass am unteren, steileren Kurventeil der Unterschied im Logarithmus der erzielten Sehschärfe stark anwächst.

Die folgenden Abbildungen 14 — 17 geben einige weitere Beispiele von Sehschärfenkurven der vier Beobachter, um die Gültigkeit der Faust-Formel $L = C\sqrt{\Gamma . D}$ zu veranschaulichen. Die Fernrohre wurden so gewählt, dass sich für $\Gamma . D$ die gleichen Werte ergaben. Die Kurvenpaare wurden stets in ein und derselben Messreihe gewonnen, können also nicht durch unterschiedliche Konstitution der Beobachter, sondern höchstens durch Messungenauigkeiten verfälscht sein. Die Faust-Formel gibt danach im Bereich 10^{-3} bis 10^{0} asb die Verhältnisse sehr gut wieder. Das kann jedoch noch nicht als Beweis für die Gültigkeit der angegebenen Faust-Formel gewertet werden, da diese Messungen allein noch keine Zahlenwerte für die Exponenten von D und Γ liefern. Dieser Beweis, bzw. das Gültigkeitsintervall der Faust-Formel werden sich jedoch aus der nun folgenden Auswertung ergeben.

6. **Die Auswertung der Messergebnisse**. — Das Ziel der Auswertung der mit der beschriebenen Anordnung gemessenen Fernrohrsehschärfen war die zahlenmässige Erfassung des Einflusses von Vergrösserung und Objektivdurchmesser des Fernrohrs auf die Sehschärfe. Es lag nahe, zu diesem Zweck den schon

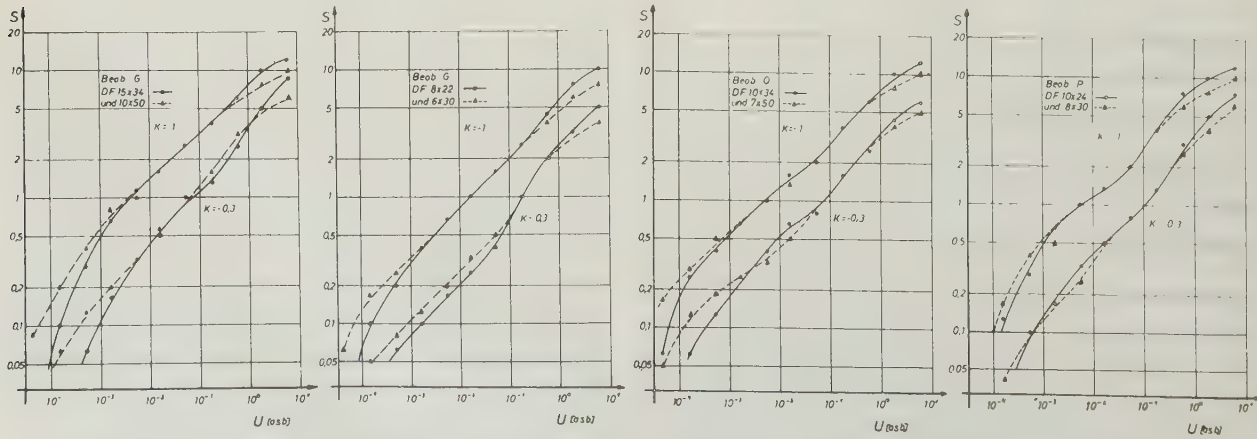

Abb. 14, 15, 16, 17. — Gemessene Fernrohrsehschärfen verschiedener Feldstecher mit $\Gamma . D$ = konstant.

bekannten Ansatz der Fernrohrleistung mit variablen Exponenten der Vergrösserung und des Objektivdurchmessers zu verwenden. Die von KÜHL [31] und auch von KÖHLER [16, 17] benutzte Darstellung mit nur einem Exponenten, dort mit c bzw. m bezeichnet, wurde aber so verallgemeinert, dass zunächst zwei voneinander unabhängige Exponenten x und y angenommen wurden, also

$$L = C\, D^x\, \Gamma^y. \tag{13}$$

Darin ist C eine sehr allgemeine Proportionalitätsgrösse, in die ausser den individuellen Beobachtereigenschaften auch Adaptationszustand, Umfeldhelligkeit, Kontrast der Sehzeichen sowie Durchlässigkeit, Kontrastminderung und unter Umständen Gesichtsfeldgrösse des Fernrohrs eingehen. Die Auswertung läuft nun auf die Bestimmung der Exponenten x und y in Abhängigkeit von der Umfeldleuchtdichte und sonstigen Versuchsdaten, wie z. B. Kontrast und Pupillengrösse, hinaus. Hierzu formt man Gleichung (13) mit $L = S_F/S_A$ um in

$$S_F = S_A \,.\, C \,.\, D^x\, \Gamma^y, \tag{14}$$

die nicht mehr die Fernrohrleistung L, die selbst schwer unmittelbar zu messen ist und durch physiologische Effekte unkontrollierbar beeinflusst wird, enthält. S_A. C geht als Faktor, der zwar von der Umfeldleuchtdichte, jedoch nicht von D und Γ abhängt, nicht weiter in die Auswertung ein. Zur Ermittlung der Werte x sind zwei Messreihen zu paaren, bei denen die Vergrösserung konstant ist, zur Ermittlung der Werte y solche, bei denen die Objektivöffnung den gleichen Wert hat. Für jeden Beobachter, jeden Kontrast und jede Leuchtdichte ergeben sich auf diese Weise je 10 Werte für x und y. Diese wurden unter Berücksichtigung der verschiedenen Genauigkeit gemittelt und ergaben für einen Beobachter die in Abb. 18 dargestellten Kurven.

Diese Darstellung und die analogen der übrigen Beobachter lassen einige weitere Gesetzmässigkeiten erkennen, die noch kurz erläutert werden sollen. Grundsätzlich sind für geringeren Kontrast im gesamten Helligkeitsbereich die x-Werte grösser und die y-Werte kleiner als die für hohen Kontrast. Der Kurvenverlauf sowohl von x als auch von y ist nicht monoton, sondern zeigt ein relatives Maximum bzw. Minimum im Übergangsgebiet vom peripheren zum fovealen Sehen, also bei etwa 0,2 asb Umfeldleuchtdichte, das Minimum der y-Kurve ist dabei wesentlich ausgeprägter. Dieser Sachverhalt kann auf folgende Weise gedeutet werden : Sehzeichen von geringem Kontrast erfordern zur Sichtung höhere Beleuchtungsstärken auf der Netzhaut, was in gewissen Grenzen durch Fernrohre grosser Austrittspupillen erreicht werden kann, m. a. W. die grössere Objektivöffnung wirkt sich günstiger aus und es ergeben sich höhere Werte für den Exponenten x und dementsprechend niedere für y. Das Zwischenmaximum

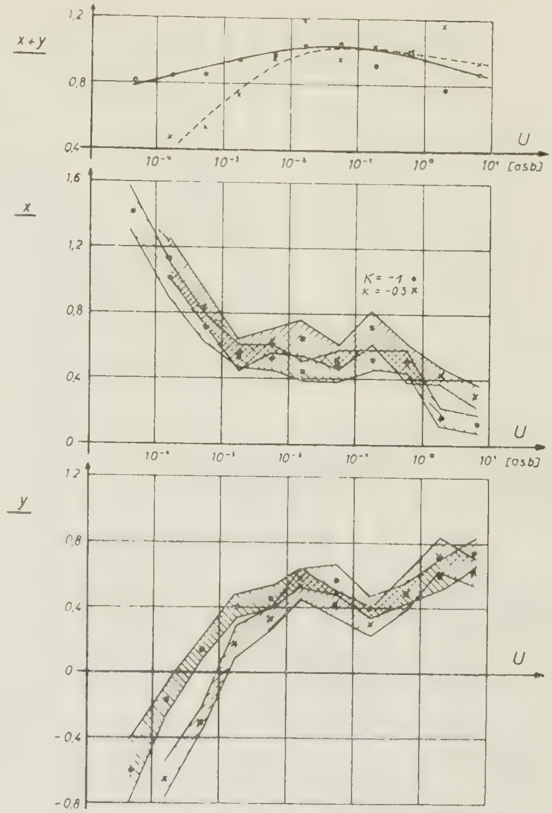

ABB. 18. — Verlauf der gemittelten Exponenten x und y sowie $x + y$ eines Beobachters. Die mittleren Fehler des Mittels sind symmetrisch zum Mittelwert eingetragen.

bzw. Minimum im Verlauf der Exponenten ist eine unmittelbare Folge davon, dass das Übergangsgebiet zum fovealen Sehen für Fernrohre mit unterschiedlichen Austrittspupillen bei verschiedenen Schirmleuchtdichten liegt. Da das Auge sich vermutlich bei der gleichen Beleuchtungsstärke auf der Netzhaut umstellt, wirkt sich ein Fernrohr grosser Austrittspupille so aus, dass der Übergang bei niederer Schirmleuchtdichte erfolgt. (Die auch hierbei auftretenden grösseren x- und kleineren y-Werte bedeuten jedoch nicht etwa, dass ein Fernrohr mit grosser Austrittspupille höhere Sehschärfen liefert als ein solches mit kleiner Austrittspupille bei gleicher Objektivöffnung, also entsprechend höherer Vergrösserung !)

Für das Endergebnis wurden die Mittelwerte der x und y Werte der vier Beobachter nochmals gemittelt. Das Ergebnis repräsentiert Abbildung 19, es entspricht in seinem Kurvenverlauf dem der Einzelbeobachter, da die Unterschiede zwischen den Beobachtern nur gering sind. Zu bemerken ist, dass das relative Minimum in den y-Werten bei Fernrohren mit verschieden grosser Austrittspupille sich durch die Mittelung stark verflacht hat. Für den leider nicht erfassbaren Einzelfall dürfte es etwa den Messungen von WEMPE [60] sowie denen von NAGEL und KLUGHARDT [42] entsprechen. Die Kurven von x für die beiden Kontraststufen scheinen unterhalb

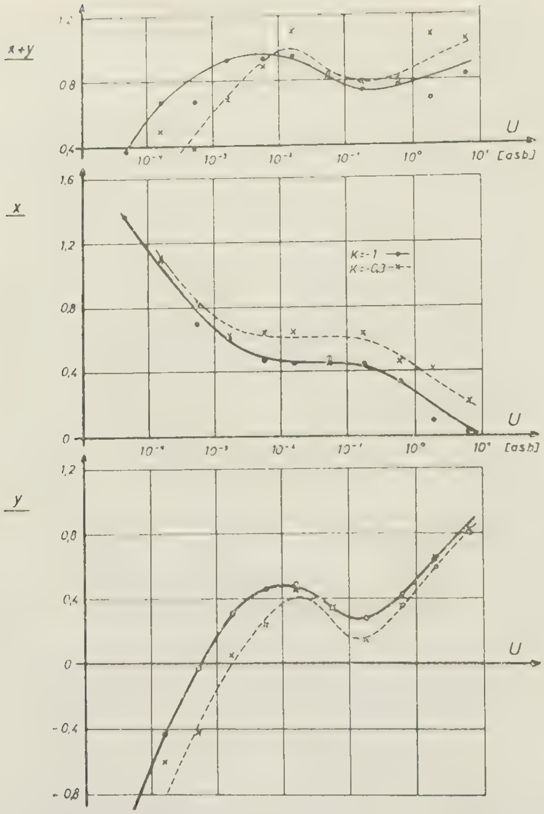

ABB. 19. — Verlauf der Exponenten x und y sowie $x + y$ gemittelt über vier Beobachter und sämtliche Fernrohraustrittspupillen von 1,6 bis 7,1 mm.

$10^{-2,5}$ asb etwas zu dicht beieinander zu liegen, vermutlich sollte die gestrichelte Kurve bei etwas höheren Werten liegen. Dem Unterschied der beiden Kontraste in der Summe $x + y$ oberhalb 10^{-2} asb ist sicher keine grundlegende Bedeutung beizumessen.

Es ist jedoch nun ohne weiteres zu erkennen, dass die Näherungsformel für die Fernrohrleistung

$$L = C . \sqrt{\Gamma D} \quad (12)$$

nicht nur für eine bestimmte Umfeldleuchtdichte Gültigkeit besitzt, sondern infolge des physiologisch bedingten Kurvenverlaufes der Exponenten x und y in einem grossen Bereich der Umfeldhelligkeit, etwa von $10^{-2,5}$ bis $10^{-1,0}$ asb als gute Näherung zu betrachten ist. Einzelheiten, wie die relativen Extrema kann sie natürlich nicht wiedergeben und eine gewisse systematische Abweichung vom tatsächlichen Sachverhalt scheint in der Richtung zu bestehen, dass besonders für geringe Kontraste der Exponent x etwas oberhalb, y dagegen unterhalb des Formelwertes 0,5 zu liegen kommt. Die Untersuchung zeigt ferner, dass die Sehschärfe erst dann nennenswert verschlechtert wird, wenn bei Leuchtdichten unterhalb 2.10^{-3} asb bei geringen Kontrasten die Vergrösserung wesentlich grösser wird als diejenige, die eine Austrittspupille von etwa gleicher Grösse wie die Augenpupille erzeugt. Für hohe Kontraste tritt dieser Fall erst bei etwa 5.10^{-4} asb ein.

Bereits bei der Auswertung der Sehschärfenwerte der einzelnen Beobachter war zuweilen aufgefallen, dass die zu Fernrohren mit kleiner Austrittspupille gehörenden x-Werte häufig grösser waren als die zu solchen mit grosser Austrittspupille gehörenden. Da dies insbesondere bei Leuchtdichten unter 10^{-3} asb auftrat, die Pupille also stets durch die Austrittspupille des Fernrohrs und nicht etwa durch die Augenpupille des Beobachters bestimmt wurde, war eine nähere Betrachtung nahegelegt, da ja auch in der Literatur ein solcher Effekt bekannt und sehr umstritten ist.

Es wurde daher eine möglichst grosse Anzahl von Differenzen passender x-Werte gebildet und gemittelt. Um einen x-Wert (für die y-Werte gilt ganz Entsprechendes) zu gewinnen, müssen zwei Fernrohre verschiedener Austrittspupille miteinander kombiniert werden, diesem x-Wert kann nicht die Austrittspupille des einen oder anderen Fernrohrs zugeordnet werden, sondern allenfalls eine mittlere. Als solche wurde im folgenden die Pupille mit dem gemittelten Flächeninhalt angenommen.

Insgesamt gewinnt man für jeden Beobachter, jeden Kontrast und jede Umfeldleuchtdichte je 6 Δx-Werte, welche gemittelt (je 48) die in der Abbildung 20 dargestellte Kurve ergeben. Um diese Δx-

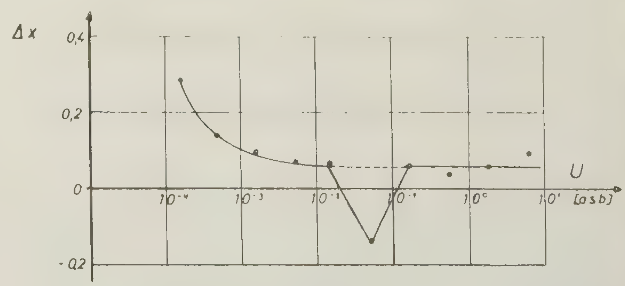

ABB. 20. — Korrekturglied Δx. Um diese Beträge sind die Werte x zu vergrössern bzw. zu verkleinern, wenn die für eine bestimmte Pupillengrösse ermittelten Werte für Fernrohre mit 1,5-fach kleinerer bzw. grösserer Pupille gelten sollen.

Werte ist der für eine bestimmte mittlere Pupille ermittelte Wert x zu vergrössern, wenn er für ein Fernrohr mit einer um den Faktor 1,47 kleineren Pupille gelten soll. In gleicher Weise ist der Wert x zu verkleinern, wenn er für ein Fernrohr entsprechend grösserer Austrittspupille gelten soll. Dazu ist zu bemerken, dass die in Abbildung 19 mitgeteilten Werte als solche einer mittleren Pupille von 3,7 mm Durchmesser zugeordneten aufgefasst werden können.

Das gleiche Verfahren in analoger Weisse auf die y-Werte aller Beobachter angewandt, ergab nahezu die gleichen Korrekturwerte, nur dass die y-Werte beim Übergang zu einer grösseren Pupille vergrössert werden und umgekehrt.

Da die Streuung der die Kurve der Abbildung 20

bildenden Werte sehr gross ist und auch Werte mit entgegengesetzten Vorzeichen auftreten, ist der ganzen Pupillenkorrektur kein allzugrosses Gewicht beizumessen. Der eine deutlich negative Wert bei 0,054 asb könnte zwanglos durch den Übergang zum fovealen Sehen erklärt werden, doch liegt er bei einer um eine halbe Zehnerpotenz niederen Leuchtdichte als das Minimum der gemittelten y-Kurve der Abbildung 19.

Um die bis jetzt gewonnenen Ergebnisse an diejenigen Theorien anschliessen zu können, die die Fernrohrleistung explizite liefern, bildet man aus den bisher gewonnenen Beziehungen einen Ausdruck für die Fernrohrleistung, indem man die Konstante C in Gleichung (13) mit den aus Abbildung 19 entnommenen Werten für x und y so wählt, dass für einen bestimmten Feldstecher (10×50) die Leistungskurve identisch wird mit derjenigen, die sich aus der Kühl'schen Theorie ergibt. Da $x + y$ angenähert eins ergibt, kann man ohne hierbei grosse Fehler zu begehen, die Gleichung (13) auch näherungsweise umformen in

$$L = C \, \Gamma \, P^x. \tag{15}$$

Es ergeben sich dann die Leistungskurven der Abbildung 21. Vergleicht man diese mit den äquivalenten

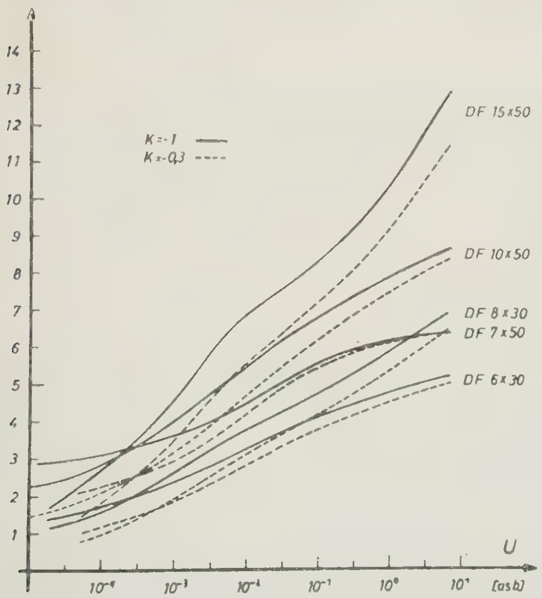

Abb. 21. — Nach dem vereinfachten Ansatz $L = C \, . \, \Gamma \, . \, P^x$ berechnete Fernrohrleistungen (bezogen auf 10×50 nach Kühl).

Ergebnissen der eingangs erörterten Theorien von Kühl und Berek, wie sie in den Abbildungen 1 und 2 dargestellt sind, so erkennt man, dass die in der vorliegenden Arbeit mitgeteilten Ergebnisse in ihren Wesenszügen mit den Aussagen der Kühl'schen Theorie übereinstimmen. Es besteht jedoch nicht die geringste Übereinstimmung mit der Theorie von Berek.

Manuscrit reçu le 4 janvier 1957.

Literatur

[1] Arndt, W., *Das Licht*, **7**, 1937, 101.
[2] Berek, M., *Zschr. f. Instrkde*, **63**, 1943, 297.
[3] Berek, M., *Zschr. f. Physik*, **125**, 1949, 657.
[4] Bouman, M. A. und van den Brink, G., *J. O. S. A.*, **43**, 1953, 895.
[5] Duran, A., *Anales Soc. Esp. Fis. y Quim.*, **39**, 1943, 579.
[6] Flügge, J., *Centralzt. f. Opt. u. Mech.*, **50**, 1929, 350.
[7] Flügge, J., *Zschr. f. Instrkde*, **55**, 1935, 367.
[8] Gehlhoff, G., *Zschrf. f. techn. Physik*, **2**, 1921, 245.
[9] Grandmontagne, R., *Cahier de Phys.*, Nr. **3**, 1941, 39.
[10] Günther, N., *Optik*, **8**, 1951, 38.
[11] Günther, N., *Optik*, **9**, 1952, 222.
[12] Hansen, G., *Optik*, **8**, 1951, 251.
[13] Hauser, F. und Mohr, L., *Centralztg f. Opt. u. Mech.*, **49**, 1928, 271, u. Bd., **50**, 1929, 267.
[14] Hering, E., *Grundzüge der Lehre vom Lichtsinn*, Springer, 1920.
[15] Hoppe, J. und Siedentopf, H., *Astron. Nachr.*, Nr. 6325, **264**, 1937, 217.
[16] Köhler, H., *Dtsch. opt. Wochenschr.*, S. 41, 53 u. 60, 1949.
[17] Köhler, H., *Optik*, **12**, 1955, 71.
[18] Krüger, K. und Zenneck, J., *Ann. d. Physik* (4), **73**, 1924, 242.
[19] Kühl, A., *Dtsch. opt. Wochenschr.*, **12**, 1926, 245.
[20] Kühl, A., *Zschr. f. techn. Physik*, **7**, 1926, 636.
[21] Kühl, A., *Zschr. f. Instrkde*, **47**, 1927, 75.
[22] Kühl, A., *Centralztg. f. Opt. u. Mech.*, **50**, 1929, 202 u. 218.
[23] Kühl, A., *Centralztg. f. Opt. u. Mech.*, **50**, 1929, 267.
[24] Kühl, A., *Phys. Zschr.*, **37**, 1936, 912.
[25] Kühl, A., *Zschr. f. Instrkde*, **58**, 1938, 469.
[26] Kühl, A., *Zschr. f. ophth. Optik*, **28**, 1940, 33.
[27] Kühl, A., *Zschr. f. Instrkde*, **61**, 1941, 278.
[28] Kühl, A., *Zschr. f. Instrkde*, **62**, 1942, 391.
[29] Kühl, A., *Zschr. f. Instrkde*, **63**, 1943, 405.
[30] Kühl, A. und Teucher, *Dtsche Luftfahrtforschung*, Bericht Nr. 1735/2, 1944.
[31] Kühl, A., *Dtsche Luftfahrtforschung*, Bericht Nr. 1735/3, 1944.
[32] Kühl, A., *Einzeldarst., Festchr. z. 25 JB. d. G. v. Miller-Polytechnikums*, 1949.
[33] Löhle, F. W., *Zschr. f. Physik*, **48**, 1928, 80.
[34] Löhle, F. W., *Zschr. f. Instrkde*, **49**, 1929, 595.
[35] Löhle, F. W., *Sichtbeobachtungen vom meteorologischen Standpunkt Diss.*, Berlin, Springer, 1941.
[36] Löhle, F. W., *Optik*, **2**, 1947, 19.
[37] Löhle, F. W., *Optik*, **5**, 1949, 287.
[38] Lüdemann, K., *Zschr. f. Instrkde*, **48**, 1928, 496.
[39] Münster, C., *Zschr. f. Instrkde*, **62**, 1942, 55.
[40] Münster, C., Unterlagen und Richtlinien für die Wahl der optischen Daten von Nachtfernrohren (nicht veröffentlicht).
[41] Nagel, M. und Klughardt, A., *Zschr. f. Instrkde*, **56**, 1936, 221.
[42] Nagel, M. und Klughardt, A., *Zschr. f. Instrkde*, **56**, 1936, 495.
[43] Nagel, M., *Zschr. f. Instrkde*, **60**, 1940, 279.
[44] Nagel, M. und Klughardt, A., *Zschr. f. Instrkde*, **62**, 1942, 16.
[45] Nagel, M. und Klughardt, A., *Zschr. f. Instrkde*, **61**, 1941, 124.
[46] Noetzli, A., *Zschr.f. Instrkde*, **35**, 1915, 65 u. 89.
[47] Otero, J. und Duran, M., *Anales Fisica y Quimica*, **37** u. **38**, 1941/42.
[48] Otero, J., Plaza, L. u. Salaverri, F., *J. O. S. A.*, **39**, 1949, 167, s. a. **43**, 1953, 925.
[49] Ronchi, V., *Zschr. f. Instrkde*, **58**, 1938, 316.
[50] Sachsenweger, R., *v. Graefes Archiv*, **155**, 1954, 496.
[51] Siedentopf, H., *Astron. Nachr.*, **271**, 1941, 193.
[52] Brunnckow, K., Reeger, E. und Siedentopf, H., *Zschr. f. Instrkde*, **64**, 1944, 86.
[53] Schober, H., *Das Sehen*, 1 Bd. Markewitzverlag, Darmstadt, 1950, 2. Bd. Fachbuchverlag G. m. b. H., Leipzig, 1954.
[54] Schober, H., *Optik*, **9**, 1952, 225.
[55] Schönwald, B., *Das Licht*, **11**, 1941, 15.
[56] Schumacher, R. O., *Das Licht*, **11**, 1941, 134.
[57] Teucher, R., *Zschr. f. Instrkde*, **62**, 1942, 390.
[58] Teucher, R., *Zschr. f. ophth. Optik*, **30**, 1942, 161.
[59] Weigel, R. und Knoll, O., *Das Licht*, **10**, 1940, 179.
[60] Wempe, J., *Zschr. f. Instrkde*, **64**, 1944, 71.
[61] Williams, A., *Journ. Psychol.*, **6**, 1938, 187.

Further studies of the positive visual after-image

C. A. Padgham

Northampton Polytechnic, London

Summary. — *The binocular matching technique, in which the sensation of brightness of an after-image formed in one eye only is balanced by a comparison light stimulus in the other eye, has been used for further studies of the positive after-image. By dark-adapting each eye in turn, it is shown that the cone receptors in the retina are mainly responsible for the after-image, whereas the matching stimulus acts mainly on the rods.*

The decay curves of the after-image in white light for two observers are given, with a discussion of the region in which after-image effects follow a reciprocity law. The after-images formed by monochromatic stimuli give exponential decay curves, compared with power-law decay curves for white light stimuli.

It is suggested that the origin of positive after-images may be the electrotonic polarisation of the axons of the ganglion cells.

Sommaire. — *La technique de fusionnement binoculaire dans laquelle la sensation de brillance d'une « image consécutive » formée dans un œil est compensée par un stimulus lumineux de comparaison dans l'autre œil a été utilisée pour une étude plus poussée des images consécutives positives. En adaptant à tour de rôle chaque œil à l'obscurité, on montre que les cônes sont essentiellement responsables de l'image consécutive alors que le stimulus de comparaison agit principalement sur les bâtonnets. Les courbes d'affaiblissement de l'image consécutive en lumière blanche sont données pour deux observateurs avec étude de la région où les effets d'image consécutive obéissent à une loi de réciprocité. Les images consécutives formées par des stimuli monochromatiques donnent des courbes d'affaiblissement exponentielles, comparées aux courbes d'affaiblissement « power-law » pour des stimuli en lumière blanche.*

Il semble que l'origine d'une image consécutive positive soit due à la polarisation électrotonique des axones des cellules ganglionaires.

Zusammenfassung. — *Bei der binokularen Vergleichsmethode wird die Helligkeitsempfindung eines Nachbildes, das nur in einem Auge entsteht, verglichen mit einem Lichtreiz, der dem anderen Auge dargeboten wird. Auf diese Weise lässt sich das positive Nachbild untersuchen. In dem dunkeladaptierten Auge sind es hauptsächlich die Zapfen, die auf der Netzhaut für das Nachbild verantwortlich sind, während der Vergleichsreiz in erster Linie auf die Stäbchen wirkt.*

Die Kurve des Helligkeitsabfalles für das Nachbild im weissen Licht zeigt bei beiden Beobachtern ein Gebiet, in dem das Nachbild einem Reziprozitätsgesetz folgt. Die Nachbilder, die von monochromatischen Reizen ausgelöst werden, weisen einen exponentiellen Helligkeitsabfall auf, dem bei weissen Lichtreizen ein Potenzgesetz für den Helligkeitsabfall gegenüber steht.

Man darf vermuten, dass die Entstehung des positiven Nachbildes mit einer elektrotonischen Polarisation an den Axonen der Ganglienzellen zusammenhängt.

The main difficulty in evolving satisfactory theories of the formation of visual after-images has been the lack of quantitative data concerning them. This has been largely due to the absence of any suitable technique for recording the subjective brightness variations of the after-images. It has been shown [1], however, that the binocular matching technique similar to that used by Wright [2] can be applied successfully to the quantitative study of the positive visual after-image. (This is the persistence of the sensation of light in complete darkness after the stimulus has been removed.) In this technique the after-image is formed in one eye only, and its brightness sensation is balanced binocularly by a comparison light stimulus in the other eye.

The apparatus. — The apparatus by means of which this can be done has been described in a previous paper [1].

The positive after-images were produced by exposing the retina of the left eye to a light stimulus of measured duration. The stimulated area of the retina was a rectangle $2^\circ \times 1^\circ$ angular size viewed foveally. The after-image sensation was balanced binocularly by a white light stimulus in the right eye. The luminance of this could be varied at will and the variations of luminance with time were recorded automatically. The comparison stimulus was also a rectangle of $2^\circ \times 1^\circ$ angular size, but was displaced vertically so that it could be viewed binocularly with the after-image without fusion. A dental impression was used to fix the position of the observer's head, and 1 mm diameter artificial pupils were used.

By means of this apparatus a number of observations have been made for white light stimuli, and a smaller number for monochromatic light stimuli.

Results. — All after-images used during this investigation were positive and the observations were those of the author, except in section II (b).

I. *The effect of dark-adaptation time on the after-image.* — In this investigation the after-images were produced by an exposure of 1 second to a white-light stimulus (colour temperature 2 900°K) of retinal illumination 2×10^6 trolands [1].

In the first series of experiments the right eye, which received the comparison stimulus, was light-adapted at the beginning of each experiment, whereas the left eye, in which the after-image was formed, was dark-adapted by occluding for periods up to 10 minutes before the experiments. The maximum of the retinal illumination curve of the comparison eye balancing the after-image is plotted against the dark-adaptation time of the other eye in figure 1. This shows that the maximum subjective brightness of the after-image is practically constant after about 5 minutes dark-adaptation.

In the second series the left eye (after-image) was

(1) 1 troland is the retinal illumination when a surface of luminance 1 candela/sq m is viewed through a pupil of area 1 sq. mm.

dark-adapted for a constant time of 5 minutes, but the right eye (comparison) was dark-adapted for periods varying from 2 to 30 minutes. The maximum retinal illumination of the comparison eye balancing the after-image is plotted in figure 2 against its dark-adaptation time. This shows a gradual fall up to about 30 minutes, of the comparison stimulus needed to balance the standardised after-image.

The explanation of the two curves of figures 1 and 2 is probably as follows. First, the primary stimulus which induces the after-image is projected on to a practically rod-free area of the retina, and it is of such high retinal illumination that the cones react to it, and they and their neural connections are mainly responsible for the after-image.

Since cone dark-adaptation appears to be fairly complete in a few minutes (Wright [3] suggests a time of 2 or 3 minutes), it is probable that the after-image sensation would remain constant after a few minutes dark-adaptation if it was of cone origin. This is in agreement with figure 1.

Further, the retinal illumination of the comparison eye needed to balance the after-image varies from about 15 to less than 0.03 trolands. Now Wright [4] estimates that the lower limit of operation of the cone mechanism is about 10^{-4} cd/sq. ft. which corresponds to about 0.05 troland. He estimates also that the range of operation of the rod mechanism is from about 10^{-1} cd./sq. ft. to 10^{-8} cd./sq. ft., which corresponds to a range of retinal illumination from about 20 to 5×10^{-6} troland. The after-images are therefore balanced by stimulating the comparison eye with retinal illuminations which border on the lower limit of operation of the cones, but which are well within the range of the rods. We would thus expect the rods to take a greater part in the binocular match of the after-images as these become fainter. The observer however would not be conscious of the slight averting of vision, necessary to project the comparison patch on the parafoveal areas of the retina, to obtain rod vision. The rods require up to 40 minutes to become fully dark-adapted, and hence they are gaining in sensitivity as dark-adaptation of the comparison eye proceeds. Therefore stimuli of progressively lower luminance are needed to balance the constant after-image sensation in the other eye, which is in agreement with figure 2.

It is thus necessary, when using the binocular matching technique for the measurement of after-images, to dark-adapt for a constant time before recording observations. A period of 10 minutes for both eyes was thus standardised for all the subsequent experiments. This period results in the maximum after-image effect.

II. *The law of decay of the after-image.* — (a) *White light stimuli.* (*Author's observations*). We showed in a previous paper [1] that the decay of the after-image formed by a white light stimulus of colour temperature 2 900°K could be represented by the equation :

$$\log R = -3 \log t + C$$

or

$$R = Ct^{-3},$$

where R is the retinal illumination of the comparison eye balancing the after-image, t the time reckoned from the beginning of the stimulus, and C is a constant. Typical results plotting log R against log t are

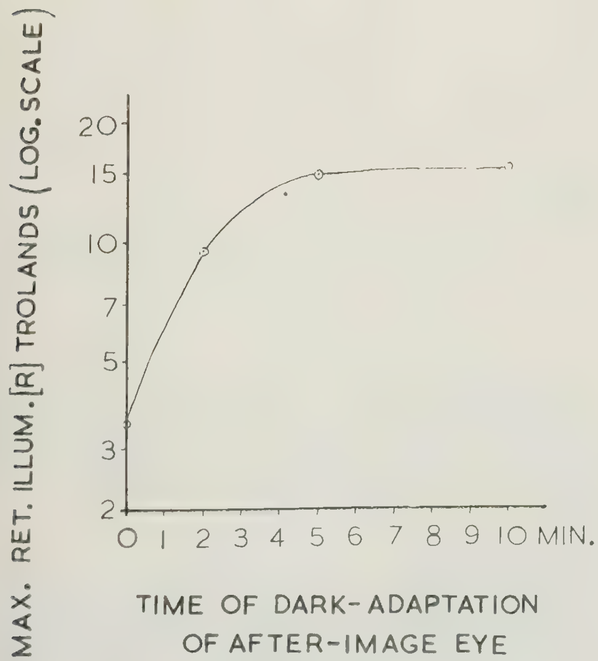

Fig. 1

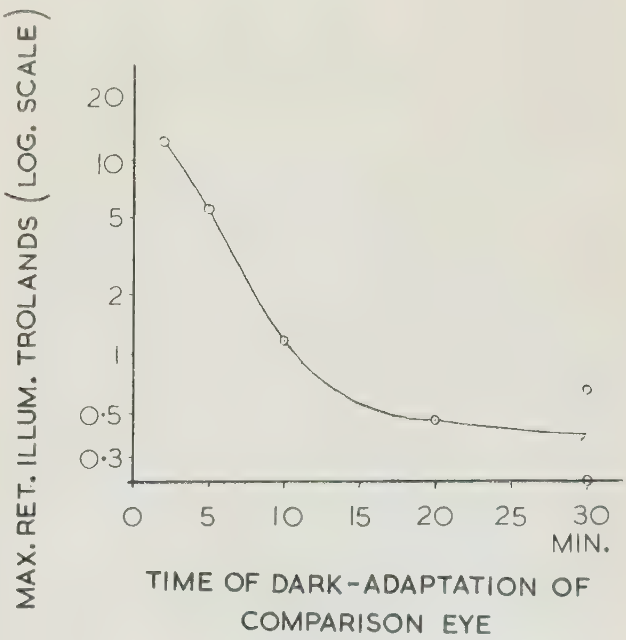

Fig. 2

shown in figure 3 for various times of exposure to a white light stimulus of retinal illumination 2×10^6 trolands. These results are those of the author, and each curve is the mean curve of eight separate determinations. This procedure of averaging eight curves

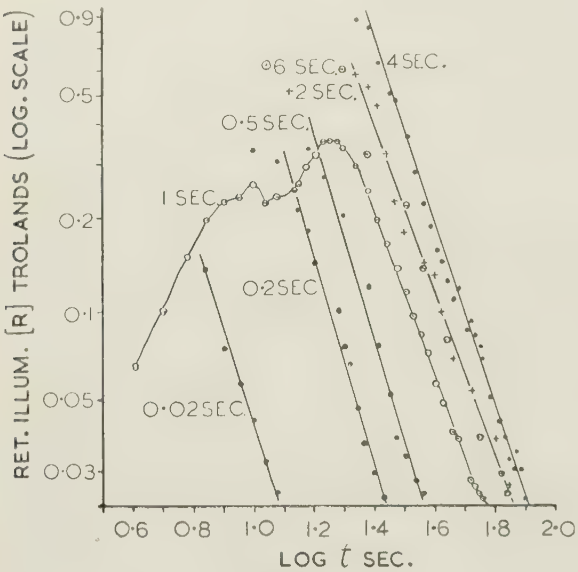

Fig. 3.

has been found to give consistency and reproducibility to within a standard deviation of 20 %. The points used for plotting these curves are taken at arbitrary intervals from the experimental curves.

(b) *White light stimuli. Observations by observer S. J. P.* A series of observations were taken by another observer S. J. P. to confirm the above results. The mean curve of seven determinations using a white light stimulus of 2×10^6 trolands exposed for one second is shown in figure 4. This is similar to the curves of figure 3, and the gradient of the straight portion is —3.3, which compares favourably with a mean gradient of —3.0 from the author's curves.

(c) *Monochromatic stimuli.* (*Author's observations*). A series of observations of the decay of the after-image were made using a monochromatic green stimulus of wavelength 5461Å. and of retinal illumination 1×10^6 trolands. This was derived from a 250-watt high-presure mercury vapour discharge lamp using a filter to isolate the mercury green spectrum line. A standard dark-adaptation time of 10 minutes was used. The results are shown in figure 5, in which log R is plotted against log t for exposure time of 1 sec. and 0.5 sec. Both curves are the mean curves of eight separate determinations. It is clear that the power law quoted in II(a) above does not apply. In figure 6 however the results are plotted of log R against t, yielding good straight lines.

The following law therefore applies : —

$$R = c\, \mathbf{e}^{-\mu t} \qquad \text{or} \qquad R = c\, 10^{-kt}$$

where μ, k and c are constants.

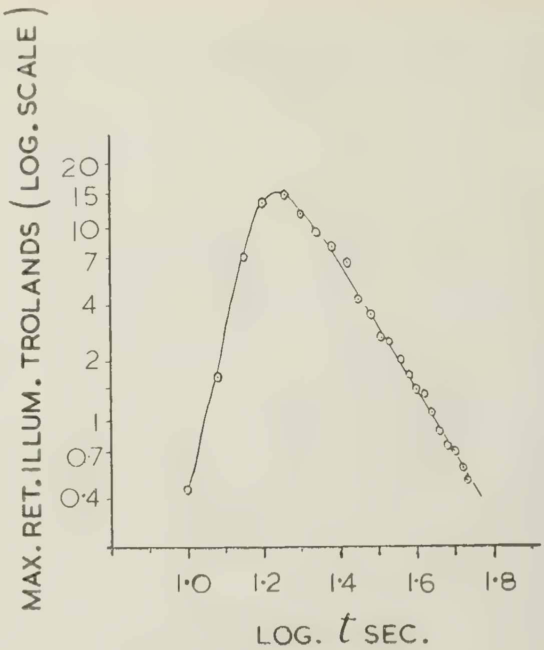

Fig. 4.

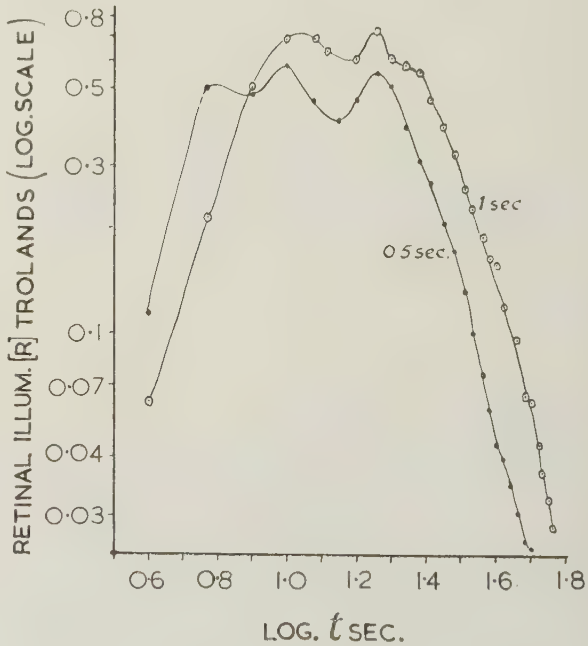

Fig. 5.

From the results the mean value of μ is 0.09, and k is 0.04. The decay constant (that is the time taken to reach $\frac{1}{\mathbf{e}}$ of the maximum value) of the curves is 10 seconds.

Little difficulty was experienced in matching the after-images with a white light comparison stimulus since the after-image colours with small fields were always very desaturated, though there is evidence that this fact is not generally true of all observers.

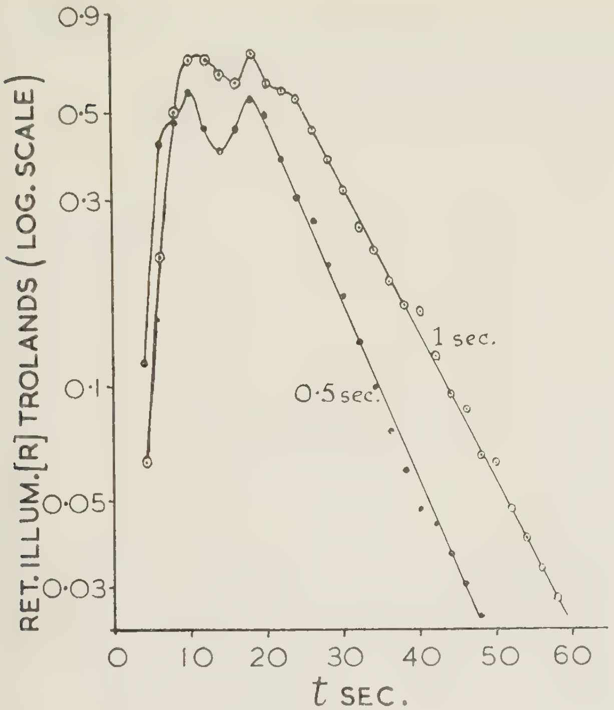

FIG. 6.

III. *The effect of varying the time of exposure to the stimulus, and of varying the intensity of the stimulus using white-light stimuli.*

Figures 7 and 8 show plots of log R against t for

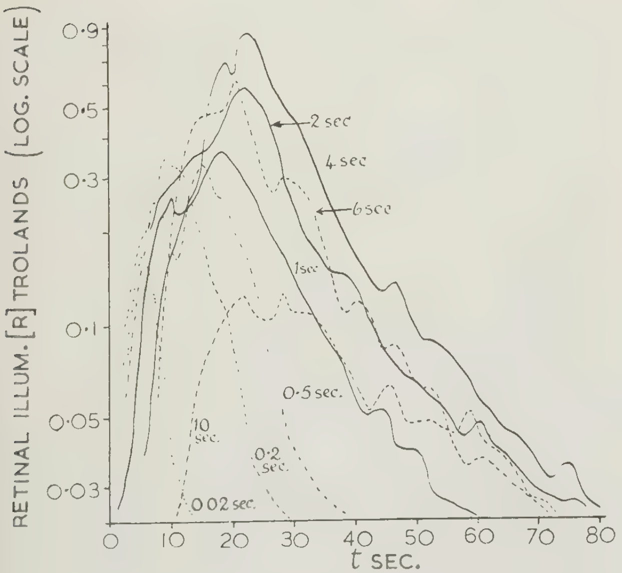

FIG. 7.

after-images produced by white-light stimuli of retinal illumination 2×10^6 trolands and 1.2×10^6 trolands respectively, for various times of exposure, each curve being the mean of eight separate determinations.

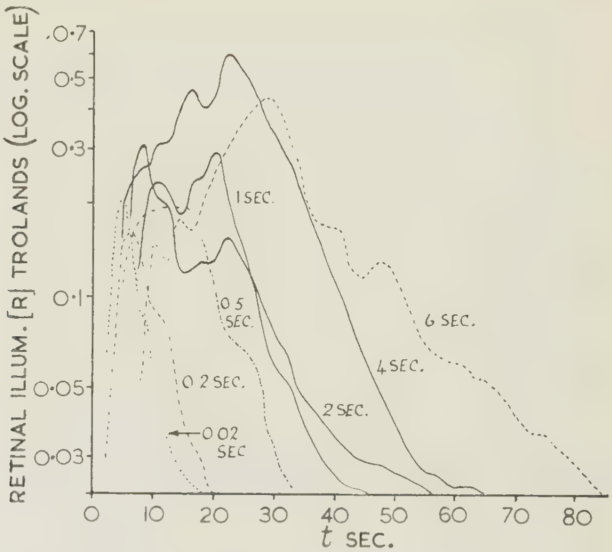

FIG. 8.

The data in these curves can be analysed by plotting the following curves :

(a) *The variation of the maximum subjective brightness of the after-image with time of exposure to the stimulus.* This plot (fig. 9), shows that the after-image of greatest subjective brightness is produced by a stimulus of 4 sec. duration with the two intensities of stimulus used.

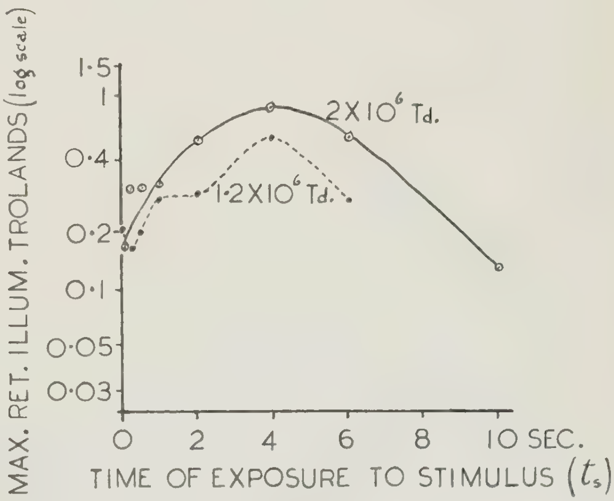

FIG. 9.

(b) *The variation of the duration of the after-image with the time of exposure to the stimulus.*

In this plot (fig. 10) the duration times of the after-images are reckoned from the end of the stimulation, and are measured until the lower matching limit of the apparatus is reached. They are approximate, since a faint after-image persists for some time after it has become too faint to be recorded by the

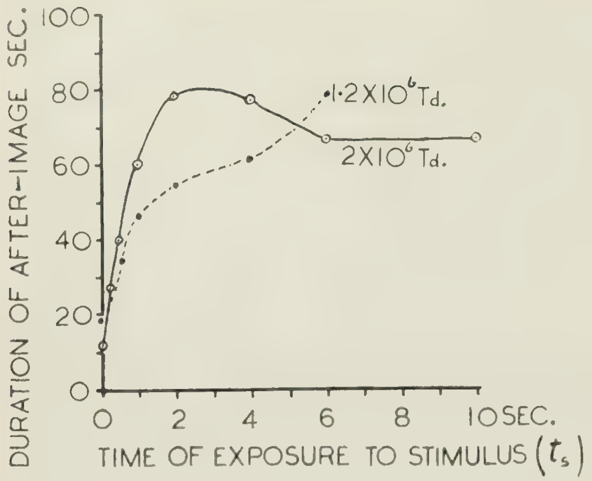

Fig. 10

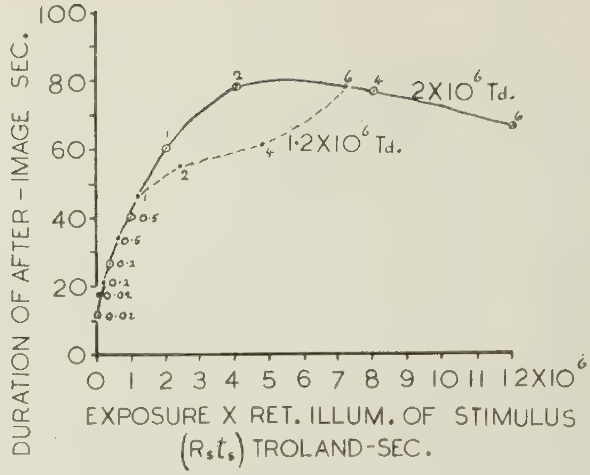

Fig. 12

apparatus. There is evidence that with longer exposures than those shown, the after-image is of longer duration.

(c) *The reciprocity law applied to after-images.* The data in figures 9 and 10 has been re-plotted (fig. 11 and 12) with $R_s t_s$ as abscissae, where R_s is the retinal illumination provided by the stimulus, and t_s is the time of exposure to it. The actual values of t_s in seconds are indicated at each experimental point. The fact that the full and dotted curves (figure 11) lie close together up to a value of $R_s t_s$ of

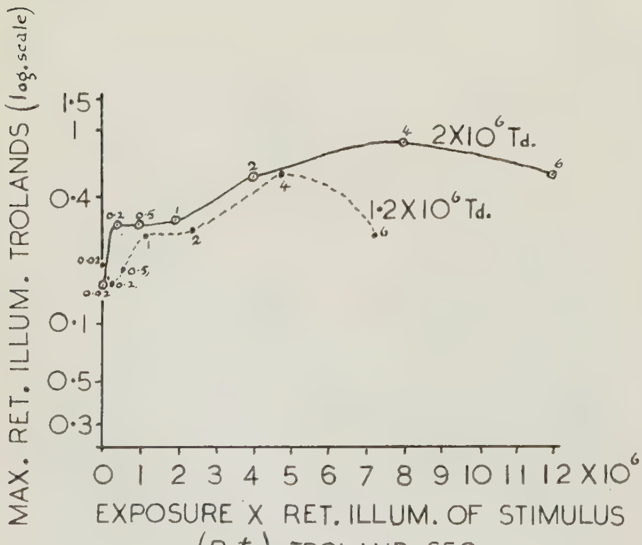

Fig. 11

about 5×10^6 troland-sec. suggests that a reciprocity law applies to the maximum subjective brightness for the two values of R_s used. Similarly (fig. 12) the curves are coincident up to values of $R_s t_s$ of about 1×10^6 troland-sec. which suggests a reciprocity law for duration, up to this value.

It is interesting to note that Hartline [5] in his study of the electrical behaviour of a single photoreceptor of Limulus found a striking agreement between his results and a reciprocity law, providing the duration of the stimulus was less than a certain value.

Discussion of the results. — It has been suggested by Granit [6] that it is the electrotonic polarisation of the axons of the ganglion cells which actually excites the discharge of the optic nerve. Further it has been suggested [7] that it is the continuance of this polarisation which is responsible for various retinal after-effects including after-images.

The various electrical models [8, 9] which have been suggested to simulate the action of nerve transmission, include resistances and condensers in series. Now a charge on a condenser shorted by a resistance decays exponentially and it is known that the leaking away of the electrotonic potential in the axons of the ganglion cells follows a similar exponential decay. Furthermore since this potential is assumed to be responsible for the excitation of the optic nerve, thus giving rise to the after-image, it should give rise to an exponential decay of the after-image. This is borne out by the after-images produced by a monochromatic stimulus (§ II c), but not by those produced by a white light stimulus (§ II a).

This however may be due to the fact that white light stimulates more types of cone colour-receptors than does the monochromatic stimulus. These receptors may separately give exponential decay curves, and yet collectively give a variation which is not exponential. That this is possible is demonstrated in figure 13, where the following three exponential curves are plotted :

$$R_1 = e^{-0.1\,t}$$

$$R_2 = 20\,e^{-0.3\,t}$$

and

$$R_3 = 40\,e^{-0.5\,t}$$

The curve $R = R_1 + R_2 + R_3$ is also shown and it can be seen that this approximates well to the function

$$R' = 1610\, t^{-3}$$

in the range $t = 10$ sec. to $t = 30$ sec.

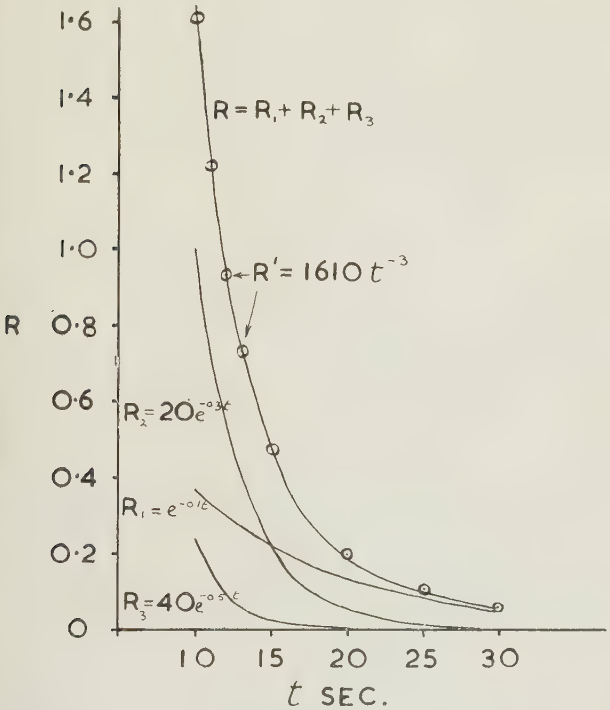

FIG. 13

The exponential decay curve $R_1 = \mathbf{e}^{-0.1t}$ is approximately that found experimentally using monochromatic green light, and the power law $R' \propto t^{-3}$ is that found using white light. Therefore decay curves for the red and blue receptors of the type $R_2 \propto \mathbf{e}^{-0.3\,t}$ and $R_3 \propto \mathbf{e}^{-0.5\,t}$, respectively, added to that for green, could account for the power law type of decay found with white light. To repeat the experiments with monochromatic stimuli in the red and blue regions of the spectrum would help to elucidate this point. Unfortunately it is difficult to produce monochromatic stimuli in these regions of the spectrum having luminances great enough to give rise to after-images of sufficient duration for measurement.

Acknowledgements. — The author is greatly indebted to Professor W. D. WRIGHT and to Mr F. Y. POYNTON for their continued help and interest. He also wished to thank Mr S. J. PARKIN for so kindly undertaking some observations.

REFERENCES

[1] C. A. PADGHAM, *Brit. J. Ophthal.*, **37**, 1953, p. 165.
[2] W. D. WRIGHT, « *Researches on Normal and Defective Colour Vision* », Kimpton, London, 1946, p. 51.
[3] W. D. WRIGHT, « *The Perception of Light* », Blackie, London, 1938, p. 21.
[4] W. D. WRIGHT, *Ibid.*, p. 23.
[5] H. K. HARTLINE, *Journ. cell. and comp. Physiol.*, **5**, 1934, p. 229.
[6] R. GRANIT, « *Sensory Mechanisms of the Retina* », Oxford U.-P. London, 1947, pp. 32, 115 and 117.
[7] S. A. TALBOT, *J. O. S. A.*, **41**, 1951, p. 931.
[8] J. F. FULTON, « *Textbook of Physiology* », W. B. Saunders Co., London, 1951, p. 17.
[9] W. GREY-WALTER, « *The Living Brain* », Duckworth, London, 1953, p. 196.

Manuscrit reçu le 10 décembre 1956.

Rod-cone interaction in the dark-adapted eye (1)

John L. Brown and Lois K. Woodward

Aviation Medical Acceleration Laboratory, U. S. Naval Air Development Center, Johnsville, Pa.

Summary. — *The amount of light required for the detection of parallel line grating patterns was measured with a variety of wavelength distributions of the test light. Grating patterns ranging from very coarse lines to very fine lines were used. All measurements were made with the eyes of observers adapted to darkenss and were based on short flash presentations of the test pattern.*

The results are interpreted to indicate that when the visual angle subtended by the smallest elements of detail in a grating pattern is 5 minutes of arc or less, detection of the pattern is based primarily on the function of the cones. For progressively coarser patterns, the receptor population upon which detection depends may consist primarily of cones, of a combination of rods and cones, or primarily of rods. Restriction of the illumination to longer wavelengths will emphasize cone function; the use of other distributions of illumination may emphasize rod function, or the combined function of both rods and cones.

Sommaire. — *La quantité de lumière nécessaire pour percevoir des mires à traits parallèles a été mesurée pour des lumières de compositions variées.*

Les traits des mires utilisées variaient des très gros aux très fins. Toutes les mesures ont été faites avec des yeux adaptés à l'obscurité ; les tests étaient présentés par éclairs.

Les résultats sont interprétés pour mettre en valeur le fait que lorsque l'angle soustendu par les plus fins éléments de la mire est inférieur ou égal à 5 minutes d'arc, la perception de la mire est due principalement à l'action des cônes. Pour des mires de plus en plus grosses, le récepteur dont dépend la perception peut être composé soit de cônes soit d'une combinaison de cônes et de bâtonnets soit de bâtonnets.

Un illuminant comportant essentiellement de grandes longueurs d'onde accentuera l'action des cônes, d'autres compositions de l'illuminant accentueront suivant les cas l'action des bâtonnets ou celle d'une combinaison de bâtonnets-cônes.

Zusammenfassung. — *Die für die Erkennbarkeit von Strichgittern notwendige Leuchtdichte wurde gemessen, wobei die Wellenlängenverteilung des Prüflichtes verändert wurde. Die benutzten Gitter enthielten sehr grobe und sehr feine Linien. Alle Messungen wurden mit dunkel adaptiertem Auge der Beobachter gemacht und erfolgten unter einer sehr kurzen Darbietung des Prüfobjekts.*

Die Ergebnisse lassen schliessen, dass die Erkennung hauptsächlich von den Zapfen geleistet wird, wenn die kleinsten Elemente des Gitters unter einen Sehwinkel von 5 Bogenminuten oder weniger erscheinen. Für zunehmend grössere Raster können als Rezeptoren für die Erkennbarkeit hauptsächlich die Zapfen oder eine Mischung von Zapfen und Stäbchen oder hauptsächlich Stäbchen wirksam werden. Die Beschränkung auf Licht grosser Wellenlängen fördert die Zapfentätigkeit, die Verwendung einer anderen Wellenlängenverteilung in der Beleuchtung kann die Stäbchenwirkung hervortreten lassen oder die gemeinsame Tätigkeit von Stäbchen und Zapfen.

1. **Introduction.** — Many curves relating visual functions to the logarithm of luminance have been determined which show two distinct branches [1]. Such curves are frequently referred to as duplex curves. In almost all instances where a duplex curve is found to represent visual function, it is accompanied by a condition of changing adaptation of the eye.

In dark-adaptation experiments [2, 3], the time course of adaptation to darkness following light adaptation is actually the independent variable. In those situations where duplex curves have been found relating such functions as visual acuity [4], flicker fusion frequency [5], stereoscopic acuity [6], and brightness discrimination [7] to luminance level, the eye is usually adapted to a given luminance level before measurements are made at that level. Duplex curves are usually interpreted to reflect the function of two different classes of receptors, rods and cones [1]. Since such curves are usually associated with changes in adaptation, it is not surprising that the question of whether rod function or cone function predominates with a given set of conditions is frequently answered in terms of adaptation of the eye.

Several recent experiments indicate that duplex curves may be obtained quite independently of changing level of adaptation of the eye [3, 8, 9]. This is accomplished by changing the criterion of threshold. In these experiments, the course of dark adaptation was measured in terms of luminance thresholds for the resolution of selected grating test objects. Under conditions requiring high levels of visual acuity (visual acuity equal to 0.25 or higher, where visual acuity equals the reciprocal of the smallest element of detail measured in minutes of arc) there was no break in the dark-adaptation curve. With the use of coarse gratings which did not require high levels of visual acuity, the dark-adaptation curve did show a break and a secondary " rod " branch followed the initial " cone " branch of the curve.

The absence of a rod branch in the dark-adaptation curves for fine gratings requiring high levels of visual acuity was interpreted to illustrate that the resolution of fine detail is dependent exclusively upon cone function in the dark-adapted eye. The duplex form of the dark-adaptation curves for coarser gratings (visual acuity less than 0.25) was interpreted to illustrate that, as the eye dark adapts, rod function becomes important for the recognition of patterns which require a relatively low order of visual acuity [3]. These results indicate a transition from rod function (or a combination of rod and cone function) to cone function alone with a change in criterion of threshold but without change in adaptation, i. e., when the eye is dark adapted for all determinations.

In order to investigate the nature of this transition, a subsequent experiment was performed in which

(1) Opinions or conclusions contained in this report are those of the author. They are not to be construed as necessarily reflecting the views or the endorsements of the Navy Department.

luminance thresholds for the resolution of grating test objects were measured in the dark-adapted eye with a range of grating sizes from coarse to fine [10]. The test objects were presented in a 6°-circular field centered at the fovea. A variety of spectral distributions of the test flash were employed in an effort to determine whether or not any of the thresholds were representative of combined rod and cone function. In any situation where data represent a gradual transition from cone function to rod function, there is a gradual divergence of curves obtained with different colored test flashes [11]. Determination of the luminance range in which such divergence is found has been employed by a number of investigators as a method of demarcating the mesopic range [12-15]. The results of this experiment indicated that there might be some divergence in the rod branches of curves relating log visual acuity and log threshold luminance for one observer, but there was little evidence of any divergence in the curves for the other observer.

It was considered possible that these somewhat ambiguous results might be related to the large test area which was employed. Visual acuity gratings presented in a 6°-area around the fovea might have been resolved by rods outside the fovea when a low order of acuity was required and by foveal cones when a high order of acuity was required. Such a change in the retinal area upon which thresholds are dependent with a shift from low to high visual acuity requirements might conceal possible interaction of rods and cones in more restricted areas [11].

It was the purpose of the present experiment to investigate the transition from cone function to rod function which occurs in a restricted extrafoveal region with changes in the criterion of threshold from resolution of coarse gratings to resolution of fine gratings when adaptation is held constant.

2. **Apparatus**. — The apparatus is illustrated schematically in figure 1. The light source E, consisted

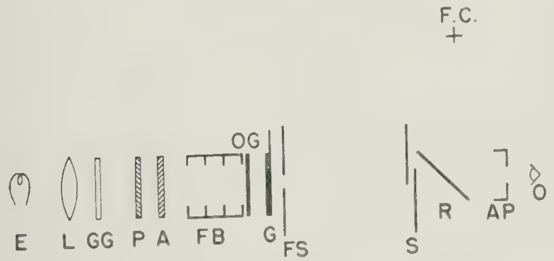

Fig. 1. — Schematic diagram of apparatus.

of a 6-volt tungsten lamp (GE n° 1763) with a clear glass envelope. The lamp was operated at 4.0 amperes, dc. The lamp was mounted in a microscope lamp housing (American Optical Company, n° 735) which contained a focusing lens L, and a ground glass diffusing screen GG. A polarizer P and analyzer A, were mounted on the front of the lamp housing. A filter box FB, which accommodated three filters, was located directly in front of the analyzer. This filter box also contained an opal glass diffusing screen OG, which was mounted in the end of the box toward the subject at O. A grating holder was mounted directly in front of this opal glass screen so that the grating G was uniformly illuminated by light from the opal glass. The grating holder was constructed so that it could be rotated through 90° about the optical axis of the apparatus. This enabled the experimenter to orient the grating lines in either a vertical or a horizontal position.

Gratings were reproduced photographically from Ronchi rulings on 2-inch square, high contrast, photosensitive plates. Glass covers were mounted over the emulsion side of the gratings with Permount. The gratings consisted of alternate, parallel, opaque lines and transparent spaces of equal width. Line widths for the nine gratings used in the experiment were 0.143, 0.0738, 0.0461, 0.0382, 0.0315, 0.0268, 0.0186, 0.0158, and 0.0130 inch. Line widths were measured with the aid of a microscope and micrometer disc.

A circular field stop FS, was located directly in front of the grating in the grating holder. The diameter of this stop was 0.47 inch and subtended approximately 1° of visual angle at the viewing distance of 26.69 inches. The presentation of test flashes was controlled by a mechanical shutter S (Wollensack Alphax Heavy Duty n° 2) located 21.75 inches from the grating.

Fixation was controlled by means of a small red fixation cross FC, which was reflected into the observer's field of view by a plain glass reflector R. The optical distance of the fixation cross from the observer's eye was set equal to the distance of the grating. In the frontal plane of the grating the fixation cross was located above and to the right of the test field at a distance of 1° from the proximal edge of the field along a 45° -meridian. It was desired to use an area on the retina all parts of which contained both rods and cones, and which was capable of affording a fairly high order of visual acuity. This dictated an area outside of, but not far removed from, the fovea. A 1° -area was selected as a compromise between the minimum desirable circular area which would enable discrimination of coarse gratings and the maximum desirable area in terms of the difference in cone density from one side of the field to the other. The area was centered along a 45° -meridian because this meridian formed the same angle with the grating lines in either the horizontal or the vertical position. Preliminary investigations indicated that luminance thresholds for an extrafoveal grating test object varied with changes in the angle formed by grating lines and the meridian along which the test area was centered. The light entering the observer's eye at O was limited by a 3 -millimeter artificial pupil AP.

Calibration. — The luminance of the test field was measured with a Macbeth Illuminometer at the sur-

face of the opal glass diffusing screen OG. Measurements were made at each of 15 different Polaroid settings from 0° to 90°. With no WRATTEN filters in the system and the Polaroid axes at 0°, the luminance of the test field was 140 millilamberts. This luminance measurement was repeated at regular intervals during the course of the experiment with no significant change in the measured value. An increase in the angle θ between the Polaroid axes up to 75° resulted in a decrease of luminance in accordance with the $\cos^2 \theta$ formula. Polaroid settings of greater than 70° were not used in the experiment. The densities of WRATTEN neutral filters were determined by placing them in the filter box and measuring the luminance of the opal glass surface with the illuminometer. Density was calculated from the difference in luminance with and without a given filter.

The photographic process used to produce the gratings was such that the densities of the spaces on the grating test plates were above zero, and the lines were not completely opaque. The densities of these regions for each of the gratings used in the experiment were measured by the use of a microscope which imaged light transmitted through a small area of the grating test plate on the phototube of a FARRAND Electron Multiplier Photometer. The instrument was balanced with no sample on the microscope stage. This afforded direct readings of the density of that region of the test plate which was selected for measurement. On the basis of these measurements, densities of the gratings at the spaces between lines were approximately 0.10 and not greater than 0.12. Line densities of all the gratings were in excess of 2.00.

The waveform and duration of the flash presented by the mechanical shutter were measured with a phototube (Continental 1P39) and Tektronix oscilloscope. The waveform which appeared on the scope when light was flashed on the tube was photographed with a Fairchild Polaroid Camera. Flashes closely approximated a square wave in form and were of 0.015-second duration, measured across the wave at a level of half-maximum amplitude. Measurements of the form and duration of flashes were made at regular intervals throughout the experiment and no significant changes occurred.

The color temperature of the source was measured with an optical pyrometer and, in addition, with a Spectra color temperature meter. Both methods of measurement yielded a value of approximately 2800°K when the source was operated at the rated current of 4.0 amperes. Spectral emission of the source in the visible range was estimated from available information on the spectral energy of the emission of tungsten filaments as a function of color temperature [16]. The relative spectral energy distribution of the source is presented in logarithmic form in Table I.

Six CORNING color filters were used in the experiment. The spectral transmission characteristics of both the neutral and the color filters, as well as of the Polaroids and the grating test plates, were measured on a BECKMAN spectrophotometer with a Spectracord attachment. Changes in the spectral transmission curve of the polarizer and analyzer with changes in their over-all transmission were not significant between 0° and 70° crossing of the axes. The transmission of the gratings was constant throughout the visible range of wavelengths. Slight differences in the measured transmission through large areas including both lines and spaces of the gratings were in agreement with differences which had been found by microdensitometry. The spectral density distributions of the polarizer and analyzer combination and of the CORNING color filters are presented in Table I. The spectral transmission characteristics of the neutral filters were sufficiently flat that they could be treated as such without introducing significant error.

TABLE I

Spectral energy characteristic of the 2 800° K source and spectral density distributions of the polarizer and analyzer combination and of the six CORNING color filters.

Wavelength-λ millimicrons	Log rel. energy tungsten source 2800° K	Polaroid rel. density	Spectral density — CORNING filters					
			2030 Dk. red	2412 Red	3480 Orange	3486 Yel. orange	4305 Blue	5543 Dk. blue
390	0.47	2.0			3.59	3.11	0.17	0.27
400	0.56	1.3			3.65	3.16	0.14	0.21
410	0.64	0.94			3.69	3.19	0.13	0.19
420	0.71	0.80			3.70	3.20	0.12	0.18
430	0.79	0.73			3.70	3.22	0.11	0.20
440	0.85	0.70			3.70	3.22	0.10	0.22
450	0.92	0.67			3.70	3.24	0.09	0.26
460	0.97	0.64			3.70	3.24	0.09	0.32
470	1.03	0.62			3.70	3.23	0.09	0.47
480	1.08	0.61			3.70	3.22	0.09	0.73
490	1.13	0.61			3.70	3.18	0.11	1.08
500	1.18	0.61			3.70	3.10	0.13	1.40
510	1.22	0.61			3.70	1.30	0.16	1.93
520	1.26	0.61			3.68	0.24	0.21	2.47
530	1.30	0.62			3.64	0.09	0.27	3.12
540	1.34	0.63			3.55	0.06	0.35	3.37
550	1.37	0.64		4.20	3.32	0.06	0.46	3.15
560	1.41	0.66		4.10	1.60	0.05	0.54	2.91
570	1.44	0.67		4.00	0.70	0.05	0.71	3.23
580	1.47	0.68		3.90	0.65	0.05	0.87	4.10
590	1.50	0.68		3.60	0.07	0.04	1.03	4.10
600	1.53	0.68	4.00	2.60	0.06	0.04	1.20	4.10
610	1.55	0.68	3.90	0.86	0.05	0.03	1.47	4.00
620	1.57	0.69	3.88	0.20	0.05	0.03	1.65	3.95
630	1.60	0.68	3.75	0.06	0.04	0.03	1.83	3.90
640	1.62	0.67	3.40	0.04	0.04	0.03	2.01	3.90
650	1.63	0.67	1.21	0.04	0.04	0.03	2.16	3.85
660	1.66	0.66	0.34	0.03	0.04	0.03	2.28	3.78
670	1.67	0.65	0.10	0.03	0.04	0.03	2.36	3.68
680	1.69	0.63	0.06	0.03	0.04	0.03	2.39	3.40
690	1.71	0.62	0.05	0.03	0.04	0.03	2.39	2.94
700	1.72	0.60	0.05	0.03	0.04	0.03	2.38	2.60
710	1.74	0.59	0.05	0.03	0.04	0.03	2.32	2.44

Photopic densities D were calculated for each of the CORNING filters from the C.I.E., luminosity data K_λ [15], the spectral radiometric transmission characteristics of the individual filters T_λ, and the spectral distribution of the light which entered the filters P_λ according to the formula :

$$D = -\log \frac{\Sigma K_\lambda P_\lambda T_\lambda \Delta\lambda}{\Sigma K_\lambda P_\lambda \Delta\lambda}.$$

The distribution of P_λ was calculated from the estimated spectral emission of the source corrected for the selectivity of the Polaroid combination. The resulting densities are listed in Table II. Scotopic densities for the color filters were calculated with the same formula by substituting C. I. E. scotopic luminosity K_λ', [17] for photopic luminosity K_λ. Scotopic densities are also presented in Table II for comparison.

TABLE II

Calculated densities of color filters for photopic and scotopic conditions based on C. I. E. data.

Filter		Photopic density D	Scotopic density D_s
Color	CORNING number		
Dark red	2 030	1.82	5.78
Red	2 412	0.96	2.60
Orange	3 480	0.48	1.35
Yellow-orange	3 486	0.09	0.37
Blue	4 305	0.57	0.23
Dark blue	5 543	2.10	1.19

3. **Procedure**. — All threshold measurements were made in the dark-adapted eye. The criterion of threshold was based on the ability to discriminate the orientation of lines of a grating test object as either vertical or horizontal. The criterion was changed by changing the width of the grating lines. Visual acuity requirements for resolution of the nine gratings used were 0.054, 0.105, 0.168, 0.203, 0.246, 0.290, 0.417, 0.490 and 0.597. Seven spectral distributions of light were employed ranging from deep red to deep blue.

Data were obtained from two observers, each of whom used his right eye. Clinical evaluations of the vision of both observers were obtained. The eye of observer JB was emmetropic and color vision was normal. The eye of GP was hypermetropic with normal color vision. Both subjects were capable of achieving the required accommodation of 1.48 diopters without correction.

In any individual experimental session, luminance thresholds were obtained for each of the grating test plates with one of the spectral conditions. The order in which grating test plates were presented in any experimental session was random. The order of sessions for spectral conditions was also random. There were five experimental sessions with each of the seven spectral distributions of the test flash.

Observers were dark adapted for a minimum of 30 minutes at the beginning of each experimental session. At the end of the dark-adaptation period, the observer was instructed to achieve optimum accommodation for the fixation cross, and then to press a cable release which tripped the shutter and presented the first test flash. The observer indicated his response to the test flash with a buzzer signal. Observers were instructed to identify grating position if they saw even the slightest suggestion of striations in the test field. They were informed in the event of incorrect responses. Neutral filters and the Polaroid setting were so selected that the luminance of the first flash was below threshold for the grating under investigation. Luminance was increased in steps of 0.1 or 0.2 log unit on successive flashes. Flashes were repeated at the same luminance whenever a correct response was obtained until two correct responses were obtained at a given luminance level. The neutral filters and Polaroid setting for this level were then recorded as an index of threshold. The position of the grating varied randomly on successive test flashes. Thresholds were determined for each of the two grating positions.

Immediately after the observer was presented a test flash, the experimenter set the apparatus for the next presentation. Fifteen seconds after the preceding flash, the observer was instructed to go ahead with the next presentation. A check experiment was performed in which a test flash was presented at a luminance level slightly higher than the threshold level for the finest grating with blue light. This resulted in no increase in luminance threshold for the coarsest grating if the interval between flashes was of 15 seconds duration. Actually, the time required by the observer to ready himself for a test presentation was such that the interval between flashes averaged approximately 30 seconds. It is therefore unlikely that any test flashes resulted in a significant effect on the level of adaptation at the time of the succeeding test flash presentation.

4. **Results**. — The logarithms of threshold luminance were calculated by subtracting the densities of neutral filters in the system, the density over minimum of the Polaroid at its threshold setting, and the calculated photopic density of the color filter, when one was used, from the logarithm of the maximum luminance of the test field. Corrections were made for the slight variations in transmission of the gratings.

The resulting values are presented in Table III. Each of these values represents an average of 10 threshold determinations, 5 for each of the two grating positions. With the exception of thresholds obtained with the dark-red filter (2030), the values for JB are somewhat lower than those for GP. It was not possible to obtain thresholds with all color filters for either subject with the finest grating (visual acuity = 0.597). Thresholds which were obtained with this grating were much more variable than those obtained with coarser gratings. The results are presented graphically in figure 2. The logarithm of visual acuity is plotted on the abscissa. The visual acuity (V. A.) for each of the gratings used in the experiment is indicated just above the axis of abscissas under the column of datum points which were obtained for each grating. The logarithms of luminance thresholds

TABLE III

Logarithm of threshold luminance in millilamberts for the identification of parallel line grating orientations (Observers JB and GP)

Filter	Grating visual acuity									
	Observer	0.054	0.105	0.168	0.203	0.246	0.290	0.417	0.490	0.597
2 030	JB	—1.65	—1.57	—1.34	—1.24	—0.99	—0.92	—0.59	—0.44	....
Dark red	GP	—1.82	—1.69	—1.42	—1.33	—1.07	—1.05	—0.65	—0.47	—0.06
2 412	JB	—1.73	—1.62	—1.46	—1.41	—1.30	—1.17	—0.99	—0.76	—0.17
Red	GP	—1.68	—1.55	—1.36	—1.44	—1.25	—1.34	—0.75	—0.52	....
3 480	JB	—1.93	—1.83	—1.48	—1.52	—1.42	—1.35	—0.88	—0.95	—0.41
Orange	GP	—1.85	—1.71	—1.46	—1.45	—1.28	—1.13	—0.70	—0.29	....
3 486	JB	—2.37	—2.29	—1.69	—1.59	—1.41	—1.28	—0.94	—0.70	—0.42
Yellow-orange	GP	—1.92	—1.88	—1.33	—1.29	—1.19	—0.76	—0.40	—0.10	....
	JB	—2.48	—2.30	—1.80	—1.52	—1.45	—1.19	—0.91	—0.75	—0.29
Wratten neutral	GP	—2.02	—1.99	—1.52	—1.26	—1.15	—0.96	—0.31	—0.19	....
4 305	JB	—2.93	—2.71	—2.08	—1.71	—1.61	—1.42	—0.99	—0.91	—0.58
Blue	GP	—2.28	—2.23	—1.61	—1.46	—1.30	—1.09	—0.69	—0.28	....
5 543	JB	—3.52	—3.19	—2.40	—1.75	—1.55	—1.28	—0.79	—0.70	....
Dark blue	GP	—2.98	—2.89	—2.05	—1.68	—1.41	—1.29	—0.87	—0.65	—0.31

are plotted on the axis of ordinates. Thresholds for resolution of the finest grating were not included on the graph since they were highly variable and incomplete. The luminance thresholds for the various gratings can be read directly only for the curve labeled *neutral*. Curves representing color filters were displaced for both observers by the amounts indicated to the right of curves for JB. The relative thresholds with any one of the color filters may therefore be compared for the two observers.

As the visual acuity requirement of the threshold criterion increases, the logarithm of luminance threshold increases at an increasing rate. The four lower curves in figure 2 have been fitted with two distinct branches. These curves represent the short wavelength end of the spectrum and their duplex form may represent a distinction between rod and cone function. The range of log luminance values covered by these curves is greatest in the case of the dark-blue filter (CORNING 5543). Similar curves have been obtained with the use of colored light in earlier experiments relating visual acuity and adapting luminance [18] as well as in an experiment in which adaptation was held constant as in the present experiment [10].

5. **Discussion**. — The results of the present experiment illustrate that duplex curves can be obtained in the dark-adapted eye when luminance thresholds are measured for grating test objects which represent a wide range of visual acuities. An important implication of this finding is that the relative spectral sensitivity of the eye should not be estimated solely on the basis of the condition of adaptation. The nature of the visual task which the eye may be called upon to perform must also be considered. If the dark-adapted eye is called upon to discriminate fine detail in a brief glimpse at an adequately illuminated visual field, the discrimination may be based solely on cone function. Discrimination may also be based solely on cones when visual acuity requirements are low but when illumination is restricted to the longer wavelengths. In such a situation, the relative effectiveness of spectrally different illuminants should be estimated in terms of the photopic luminous efficiency data, even though the eye is dark adapted.

A question may be raised as to how illumination should be evaluated for visual tasks which fall in the range of transition between rod and cone function [11, 19]. In the present experiment, such tasks are represented by visual acuities corresponding to the position of the break in the curves of figure 2. Although the two branches of duplex curves, such as the four lowest curves in figure 2, are usually charac-

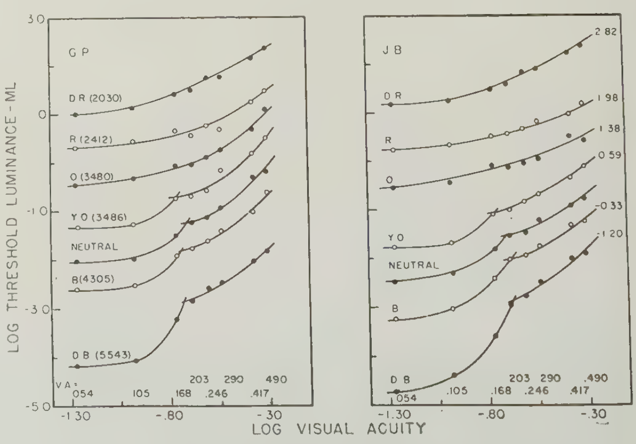

FIG. 2. — Log threshold luminance as a function of the visual acuity requirements of the test pattern.

terized as " rod " and " cone " branches, these terms probably represent an oversimplification. It is frequently assumed that the abrupt nature of the break in duplex curves implies an abrupt and complete transition of functional dependence from one type of receptor to the other [11, 20]. Actually, there is no logical basis for the assumption that the transition is complete, and experimental evidence indicates that neither the " rod " branch [11, 14, 18] nor the " cone " branch [21] is representative of " pure " functioning of either of these receptors.

It is of interest to examine in detail the implication of assuming the " rod " branch to represent rod funtion exclusively. If the entire rod branch were truly representative of rods alone, i. e., a single type of receptor having a fixed spectral sensitivity, then the shape of this branch would be independent of the spectral distribution of the test light. Rod branches might differ in position on the log luminance axis, but they could be superimposed by translation along the log luminance axis [22].

In order to clarify these statements, one may consider a hypothetical case in which thresholds for a visual task which depends on a single type of receptor, e. g., rods, are measured with any two spectral distributions of the test light. The two spectral distributions may be obtained by using two color filters, e. g., red and blue. It is assumed that the amount of receptor excitation E_1, which is required at threshold for the visual task will be a constant, independent of the spectral distribution of the test light. If the thresholds are determined by varying the transmission of neutral filters, the excitation may be expressed as proportional to the radiant energy required at threshold, corrected for the spectral sensitivity of the receptors,

$$(1) E_1 \cong T_{1N_R} \int_{370}^{700} T_{\lambda_R} K'_\lambda P_\lambda d_\lambda = T_{1N_B} \int_{370}^{700} T_{\lambda_B} K'_\lambda P_\lambda d_\lambda$$

where E_1 = receptor excitation required for the visual task,

T_{1N_R} = transmission of neutral filters at threshold with red filter,

T_{1N_B} = transmission of neutral filters at threshold with blue filter,

T_{λ_R} = spectral transmission of red filter,

T_{λ_B} = spectral transmission of blue filter,

K'_λ = spectral sensitivity of receptors upon which the task depends,

P_λ = spectral energy of the source,

λ = wavelength in millimicrons.

The expressions for the blue and red filters which represent threshold radiant energy corrected for the spectral sensitivity of the receptors should be numerically equal. This will be true if K'_λ affords an accurate description of the spectral sensitivity of the receptors and if the assumption is valid that thresholds end exc lusively on this single type of receptor.

A similar expression may be written relating the amount of excitation required for a second hypothetical visual task which, although still dependent on the single receptor type, requires a higher level of excitation,

$$(2) E_2 \cong T_{2N_R} \int_{370}^{700} T_{\lambda_R} K'_\lambda P_\lambda d\lambda = T_{2N_B} \int_{370}^{700} T_{\lambda_B} K'_\lambda P_\lambda d\lambda.$$

Expression (1) may be subtracted from expression (2) after these expressions have been changed to logarithmic form yielding the following equation :

$$(3) \quad \log T_{2N_R} - \log T_{1N_R} = \log T_{2N_B} - \log T_{1N_B}.$$

Equation (3) illustrates the fact that the *difference* in log threshold values for the two visual tasks is a constant, for any spectral distribution of the test light. It further illustrates the fact that the *difference* in log threshold values for the two visual tasks is not dependent on the spectral sensitivity function, K'_λ, as long as the spectral distribution of the test light is held constant.

On the basis of the preceding development, we can make several statements for any visual tasks which depend on a single type of receptor. For example, the shape of a function relating log threshold luminance and rod visual acuity will be a constant, independent of the color of the test light. If thresholds for the resolution of acuity objects which are " seen " by the rods are calculated in terms of the spectral sensitivity of cones (as they would necessarily be if expressed in terms of luminance) the shape of the log luminance vs. visual acuity curve will not be affected, but the position of the curve with respect to the log luminance axis may be shifted. The amount of the shift will depend on the relative effectiveness of the given energy distribution for the stimulation of cones, for which the luminance scale applies, as compared with the effectiveness of the same distribution for the stimulation of rods, upon which threshold actually depends.

The results of the present experiment may be compared with results which would be expected if the " rod " branches of duplex curves do represent exclusively rod function. It should be possible to superimpose the " rod " branches of the four lower curves by simply shifting them along the log luminance axis. The yellow-orange and the neutral curves can be superimposed by simple transposition along the ordinate axis. In the case of the three lower curves, however, the decrease in luminance corresponding to a given decrease in visual acuity occurs at a progressively greater rate as one goes from the neutral, to the blue, to the dark-blue curves.

The log threshold luminances for visual acuities of 0.168 and 0.105 lie on the " rod " branches of the four curves in figure 2 which are duplex in form for both observers. On the basis of equation (3) the decrease in log threshold luminance with a decrease in the acuity requirement from 0.168 to 0.105 should be the same for all four of these curves if the " rod "

branches represent solely the function of rods. Differences for both observers in log threshold luminances for these two acuities were calculated for each of the two grating orientations in each of the five experimental sessions with each of the four spectral conditions represented by the duplex curves. These differences were subjected to an analysis of variance. The variance contributed by the four spectral conditions was highly significant ($P < 0.01$). None of the variance contributed by the other conditions, i. e., grating orientation or observers, nor any of the interaction variances were significant. The " rod " branches for different spectral conditions cannot be superimposed by a shift along the log luminance axis. The results of the present experiment appear to indicate combined rod-cone function over much of the range represented by " rod " branches.

REFERENCES

[1] S. HECHT, *Physiol. Rev.*, **17**, 1937, p. 239.
[2] G. WALD and A. B. CLARK, *J. Gen. Physiol.*, **21**, 1937, p. 93.
[3] J. L. BROWN, *J. O. S. A.*, **44**, 1954, p. 48.
[4] S. SHLAER, *J. Gen. Physiol.*, **21**, 1937, p. 165.
[5] S. HECHT and S. SHLAER, *J. Gen. Physiol.*, **19**, 1936, p. 965.
[6] C. G. MUELLER and V. V. LLOYD, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, Wash., **34**, 1948, p. 223.
[7] S. HECHT, J. C. PESKIN and M. PATT, *J. Gen. Physiol.*, **22**, 1938, p. 7.
[8] J. L. BROWN, C. H. GRAHAM, H. LEIBOWITZ and H. RANKEN, *J. O. S. A.*, **43**, 1953, p. 197.
[9] A. L. DIAMOND and A. S. GILINSKY, *J. Exp. Psychol.*, **50**, 1955, p. 134.
[10] J. L. BROWN, M. P. KUHNS and H. E. ADLER, *J. O. S. A.*, **47**, 1957, p. 198.
[11] C. S. BRIDGMAN, *J. O. S. A.* **44**, 1954, p. 394.
[12] W. de W. ABNEY and FESTING, *Proc. Roy. Soc. London*, **50**, 1891, p. 371.
[13] W. D. WRIGHT, *Researches on Normal and Defective Colour Vision.* C. V. Mosby & Co., St. Louis, 1947.
[14] A. H. TAYLOR, *Illum. Engng.*, **38**, 1943, p. 89.
[15] K. S. WEAVER, *J. O. S. A.*, **39**, 1949, p. 278.
[16] *Lighting Handbook.* Illuminating Engineering Society, New York, 1947.
[17] International Commission on Illumination, *J. O. S. A.*, **41**, 1951, p. 734.
[18] S. SHLAER, E. L. SMITH and A. M. CHASE, *J. Gen. Physiol.*, **25**, 1942, p. 553.
[19] C. S. BRIDGMAN, *J. O. S. A.*, **42**, 1952, p. 832.
[20] C. S. BRIDGMAN, *J. O. S. A.*, **43**, 1953, p. 733.
[21] R. BROOKE, *J. O. S. A.*, **41**, 1951, p. 1010.
[22] W. S. STILES, *Proc. Phys. Soc.* London, **56**, 1944, p. 329.

Der visuelle Lebensraum des Menschen

Norbert GÜNTHER

ZUSAMMENFASSUNG. — *Die Untersuchung der Zusammenhänge zwischen realer Welt und Sinnenwelt, beschränkt auf die visuelle Wahrnehmung, zeigt, dass der subjektive Raum durch Informationen aufgebaut wird, die die menschliche Sehapparatur aus dem objektiven Raum erhält. Daraus ergibt sich einerseits der Versuch einer logischen Begründung der realen Welt und andererseits eine exakte Beschreibung der Gestalt der visuellen Umwelt, d. h. des Sehraumes. Dieser ist endlich und führt eine pulsierende Bewegung mit Halbtagsperiode aus. Dabei erfahren Sonne und Mond schwankende Wahrnehmungsgrössen, die sich streng errechnen lassen. Ferner wird bewiesen, dass im Nahbereich, dem eigentlichen Lebensraum des Menschen, die aus Gründen der Orientierung zu fordernde Übereinstimmung zwischen objektivem und subjektivem Raum gegeben ist.*

SUMMARY. — *Study of the relationship between the real and the subjective world, limited by visual perception, shows that subjective space is constructed from visual sense data.*

From this an attempt can be made to establish a logical basis for the real world, and to describe exactly the visual world. The latter is limited and has a half-day period of pulsation. The visual size of the sun and moon show exactly measurable variations.

Further it is shown that in the near region agreement between subjective and objective space is attained by orientation.

SOMMAIRE. — *L'étude des rapports entre le monde réel et le monde physique, limité à la perception visuelle, montre que l'espace subjectif est construit à travers les informations que perçoit de l'espace-objet l'appareil visuel de l'homme.*

De là résulte d'une part l'essai d'une fondation logique du monde réel et d'autre part une description exacte de la forme du monde visuel. Ce dernier est limité et présente une pulsation dont la période est de 1/2 journée. Soleil et Lune présentent des grandeurs de perception variables qui peuvent être mesurées exactement. Les grandeurs perceptibles attachées au Soleil et à la Lune présentent aussi des variations qui peuvent être mesurées exactement.

Ensuite il est montré que dans le domaine proche, c'est-à-dire l'espace vital de l'homme, l'accord exigé entre l'espace objectif et l'espace subjectif est atteint grâce à l'orientation.

I. **Sinnenwelt und reale Welt**. — Der Mensch ist, ebenso wie natürlich auch jedes andere Lebewesen, in der Lage, sich in seinem Lebensraum vermittels seiner Sinne zu orientieren. Als bedeutsamstes Sinnesorgan hat für ihn zweifellos der Gesichtssinn zu gelten, bei dessen Ausfall das Orientierungsvermögen in extremer Weise vermindert wird. Die menschliche Sinnenwelt ist, wie MAX PLANCK in seinem an der Universität Leiden im Jahre 1929 gehaltenen Vortrag über das Weltbild der neuen Physik ausführt, die einzige logisch unwiderlegbare reale Gegebenheit. Diese Sinnenwelt befindet sich natürlich nicht ausserhalb von uns. Sie ist ein Bestandteil unseres Bewusstseins, von anderer Beschaffenheit im wachen Zustand als im Traumzustand und in einer uns unbekannten Weise verlöschend, wenn das diesseitige Dasein beendet ist. Aus dieser Tatsache ziehen manche Naturforscher und Philosophen den Schluss, dass ein sogenannter " Gegenstand " in physikalischer Hinsicht nichts weiter ist, als ein Komplex von verschiedenartigen zusammentreffenden Sinnesempfindungen. Planck tritt dieser Auffassung mit rationalen Gesichtspunkten entgegen und argumentiert etwa folgendermassen : der Verstand lässt uns die Existenz unserer Sinnenwelt erkennen, die Vernunft fordert die Annahme einer daneben existierenden realen Welt ; dazu gesellt sich eine dritte Welt, die von beiden klar zu unterscheiden ist, nämlich die Welt der physikalischen Wis-

senschaft oder das physikalische Weltbild als bewusste, einem bestimmten Zweck dienende Schöpfung des menschlichen Geistes.

Manche Verwirrungen in den philosophischen, nicht nur den naturphilosophischen Anschauungen der Vergangenheit und der Gegenwart mögen darauf zurückzuführen sein, dass diese Trennung gewöhnlich nicht mit der nötigen Schärfe erkannt wird. Das hängt sicherlich zu einem guten Teil mit der Tatsache zusammen, dass die physikalische Wissenschaft die Zusammenhänge innerhalb der realen Welt seither klarer zu formulieren verstand als die in der Sinnenwelt wirksamen. Die Sinnenwelt ist eine gegebene Tatsache, die im Rhythmus der Generationen ihren unveränderten Bestand hat, und erst dort problematisch wird, wo der Mensch durch Verwendung technischer Instrumente den natürlichen Wahrnehmungsbereich zu erweitern trachtet. Die reale Welt hingegen ist erfüllt von Geheimnissen, Zusammenhängen, die sich der sinnlichen Wahrnehmung entziehen und der Phantasie des Forschers ein nahezu unbegrenztes Betätigungsfeld eröffnen. Auch darf der praktische Nutzen des Studiums der realen Welt nicht übersehen werden, wohingegen der praktische Wert unserer Sinnenwelt evident ist und keine dem ersteren vergleichbare Erweiterung erwarten lässt. Immerhin legt uns nicht nur der menschliche Erkenntnistrieb, sondern auch das Bedürfnis zur Konstruktion von Hörapparaten, künstlichen Sehhilfen, Fernrohren, Mikroskopen usw. nahe, dem Studium der gesetzlichen Zusammenhänge im Bereiche der Sinnenwelt Gedankenarbeit zu widmen. Entsprechend der herausragenden Bedeutung des Gesichtssinnes gilt das insbesondere für den visuellen Bereich der Sinnenwelt, den *Sehraum*.

Der von dem Physiologen A. v. TSCHERMAK-SEYSENEGG eingeführten Klassifikation entsprechend, soll der dem Sehraum adäquate Bereich der realen Welt als *Gesichtsraum* bezeichnet werden. Die Existenz dieses Raumes ist nach PLANCK logisch nicht beweisbar, während die Existenz des Sehraumes jedenfalls für das einzelne Individuum keiner logischen Begründung bedarf. Wenn das gilt, so drängt sich jedoch sofort die Frage auf, wie dieser im Bewusstsein verankerte Sehraum eigentlich zustande kommt. Da seine Existenz verbürgt ist, muss schon aus Kausalitätsgründen eine weitere Realität angenommen werden, welche die zum Aufbau des Sehraumes nötigen Informationen liefert. Wenn es gelingt, die Quelle dieser Informationen im Gesichtsraum ausfindig zu machen, was naheliegend ist, und damit die Gestalt des Sehraumes widerspruchsfrei zu erklären, so ist diese Realität gefunden und es bedarf nicht mehr der Zuhilfenahme der menschlichen Vernunft, um die Existenz auch des Gesichtsraumes zu beweisen. Solange aber die kausale Verknüpfung dieser beiden Räume nicht gegeben ist, bleibt der Gesichtsraum als Bestandteil des physikalischen Weltbildes ein menschliches Geistesprodukt, das zwar zweckmässig, aber nicht logisch begründbar ist. Denn auch der Gesichtsraum entzieht sich, wie alle übrigen Bestandteile der realen Welt, der unmittelbaren sinnlichen Wahrnehmung.

II. **Die den Sehraum aufbauenden Informationen**. — Gesichtsraum, als gedankliche Konstruktion, und Sehraum, als Erlebnis, sind inkommensurabel. Dieser Satz folgt aus der leidigen Tatsache, dass in beiden Räumen verschiedene Masssysteme gelten, wodurch es unmöglich ist, Messmethoden des einen Raumes im anderen anzuwenden.

Die reale Welt ist auf Grund des heute gültigen physikalischen Weltbildes ein vierdimensionales Raum-Zeit-Kontinuum endlicher Ausdehnung. Der Gesichtsraum ist demgegenüber dreidimensional und von unendlicher Ausdehnung. In ihm gilt die euklidische Geometrie in aller Strenge. Mit Hilfe des im Gesichtsraum gültigen Masssystems lässt sich jede in diesem vorhandene Strecke mit einer eindeutigen Längenangabe in Zentimetern versehen, was in der vierdimensionalen Welt infolge der Längenkontraktion nicht möglich ist. Der Sehraum ist dreidimensional, jedoch von endlicher Ausdehnung, was schon daraus folgt, dass die Gestirne beispielsweise keinesfalls in ihrem tatsächlichen praktisch unendlichen Abstand, sondern in wenn auch grosser, so doch durchaus endlicher Entfernung wahrgenommen werden. Auch gilt die euklidische Geometrie im Sehraum nicht. Es können zwei im Gesichtsraum gleichlange oder parallele Strecken mit einem " Informationsgehalt " versehen werden, derart, dass ihre Gleichheit oder Parallelität im Sehraum verloren geht. Etwas Derartiges wird — in übrigens begrifflich falscher Weise — gewöhnlich als " optische Täuschung " bezeichnet.

Das Masssystem des Sehraumes basiert auf der Erfahrung, auf dem sich ständig wiederholenden Erlebnis. Es treten eine Vielzahl von Einheiten auf, beispielsweise die Grösse eines Menschen, der Durchmesser eines häufig gebrauchten Geldstückes u. dgl. Zeichnet man etwa eine Anzahl Kreise verschiedenen Durchmessers auf einen Karton und erteilt jemandem die Aufgabe, diejenige Kreisfläche zu bezeichnen, die in ihrer Grösse einem der gebräuchlichen Geldstücke entspricht, so werden kaum erhebliche Fehldeutungen auftreten, während die Angabe des im Gesichtsraum geltenden Durchmessers in Zentimetern oder Millimetern zumeist überraschend falsch ausfällt.

Aus der Inkommensurabilität von Sehraum und Gesichtsraum folgt nun keinesfalls die Unmöglichkeit, Messwerte des einen Systems mathematisch zu Messwerten des anderen in Beziehung zu setzen, wie häufig behauptet wird. Betrachtet man beispielsweise die auf dem Karton aufgezeichneten Kreise durch eine Lupe und wählt denjenigen Kreis aus, dessen Grösse einem bestimmten Geldstück entspricht, so braucht man seinen im Gesichtsraum vorhandenen und mit einem normalen Massstab feststellbaren Durchmesser nur durch den tatsächlichen Durchmesser des betreffenden Geldstückes zu dividieren, um die im Sehraum gültige subjektive Vergrösserung der Lupe zu erhalten.

Die Vorstellung einer bestimmten Sehgrösse und Sehferne für jedes dargebotene Sehding stimmt grössenordnungsmässig bei den meisten Menschen miteinander überein, so dass dem Sehraum des Menschen eine spezifische, vom Einzelindividuum trennbare Eigengesetzlichkeit zuzubilligen ist. Die Informationen, die diese einheitliche Vorstellung auslösen, müssen also aus einer allen gemeinsamen Quelle fliessen, als die sich der Gesichtsraum anbietet, dem dann auch logisch eine reale Existenz zugeschrieben werden muss.

Man soll sich bei diesen Betrachtungen jedoch sehr davor hüten, die scharfe Trennung zwischen Sehraum und Gesichtsraum zu verwischen. In allen Stadien der Untersuchung bleibt der Dualismus unseres Lebensraumes erhalten. Welche Folgen sich ergeben, wenn dieser zwingende Grundsatz verlassen wird, zeigt in temperamentvoller Weise Vasco Ronchi in seiner " Kritik an den Grundlagen der Optik des 17. Jahrhunderts. "

Nunmehr bleibt nur noch übrig, die Informationen zu katalogisieren, um den Ansatz zu einer mathematischen Behandlung des Sehproblems zu gewinnen. Dazu möge folgende Aufstellung dienen : 1. *Akkommodationsgefühl*, 2. *Grösse des Netzhautbildes*, 3. *Vorstellung von der wahren Grösse des Gegenstandes*, 4. *Konvergenzgefühl*, 5. *Querdisparation*, 6. *Bewegung der Sehdinge*, 7. *Kontrast*, 8. *Farbigkeit usw.*

Diese Liste lässt sich beliebig fortsetzen. Die sogenannten " Optischen Täuschungen " werden ausnahmslos durch Informationen jeweils wohlbestimmten Charakters hervorgerufen. Man kann also geradezu Informationen erfinden, mit denen man die Gestalt des Sehraumes beeinflusst. Die Architektur, und nicht nur diese, macht von den sich daraus ergebenden Möglichkeiten allenthalben Gebrauch.

Bereits ein Vergleich zwischen den beiden ersten Positionen der vorstehend angeführten Informationsliste zeigt, dass die einzelnen Informationen ein verschiedenes Gewicht haben, so dass schon dann eine brauchbare Beschreibung des Sehraumes zu erwarten ist, wenn der gesuchten Wahrnehmungsfunktion nur wenige, eben die gewichtigsten Informationen zugrunde gelegt werden.

III. **Die im Gesichtsraum wirksamen Zusammenhänge**. — Ein selbstleuchtendes oder beleuchtetes Gesichtsobjekt sendet Strahlen aus, die die Pupille des Auges durchsetzen und ein Bild des Objektes auf der Netzhaut erzeugen. Es gibt jedoch nur dann ein scharfes Bild, wenn die Ciliarmuskulatur betätigt wird und der Augenlinse die für die Scharfstellung erforderliche Brennweite erteilt. Dieser Vorgang wird als Akkommodation bezeichnet. Er unterliegt der Willkür des Beobachters, der völlig bewusst von einer Objektentfernung auf die andere umakkommodieren kann. Es ist also ein Akkommodationsgefühl vorhanden, das den Vorgang der Scharfeinstellung des Auges zu steuern gestattet. Sehr ausgeprägt ist dieses Gefühl allerdings nicht, insbesondere versagt es bereits in einem verhältnismässig geringfügigen Abstand des Gesichtsobjektes, wie überhaupt die unendliche Ferne, wohl infolge der Unvollkommenheit unseres Sehapparates, in keinem Falle als Information in Erscheinung tritt.

Wenn man die wahre Entfernung des Gesichtsobjektes mit E, den Abstand des okularen Fernpunktes mit E_f und die maximal mögliche Akkommodationsweite, die bei Entspannung des Ciliarmuskels auftritt, mit R bezeichnet, so kann die aus dem Akkommodationsgefühl resultierende Akkommodationsentfernung E' durch die Beziehung

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{E} - \frac{1}{E_f} + \frac{1}{R} \tag{1}$$

ausgedrückt werden. Solange sich ein positiver Wert für E' ergibt, wird eine verwertbare, d. h. hinreichend scharfe Abbildung vermittelt. Beim Fehlsichtigen tritt dann Entspannung des Ciliarmuskels ein, wenn der Abstand E des Gesichtsobjektes gleich dem Fernpunktsabstand E_f oder grösser als dieser ist. Der Fehlsichtige wird also, solange er keine voll auskorrigierte Brille trägt, " falsch informiert ". Falls er jedoch eine Brille trägt, unterscheidet sich der Informationsinhalt nicht von dem, den der Normalsichtige erfährt, dessen Fernpunkt im Unendlichen liegt. Am Rande sei vermerkt, dass die beim Unterschreiten des Nahpunktes auftretende Unschärfe hier unberücksichtigt bleiben soll.

Das unter Position 1 der Liste der Informationen aufgeführte Akkommodationsgefühl ist also mathematisch durch die strahlenoptisch, d.h. im Gesichtsraum auftretende Akkommodationsentfernung E', entsprechend Gl. (1), definiert.

Beim Akkommodieren auf das Gesichtsobjekt entsteht auf der Netzhaut ein scharfes Bild von einer bestimmten Grösse, die vom Tangens des Winkels φ abhängt, unter dem das Objekt G dem Auge erscheint. Damit gilt die Beziehung

$$\operatorname{tg} \varphi = G/E.$$

Wird das gleiche Objekt durch ein optisches Instrument der Winkelvergrösserung

$$\Gamma = \operatorname{tg} \varphi' / \operatorname{tg} \varphi \tag{2}$$

betrachtet, so erscheint es dem Auge unter dem Winkel

$$\operatorname{tg} \varphi' = G/E'',$$

worin E'' diejenige Entfernung ist, in die das Objekt bekannter und richtig empfundener Grösse gerückt zu sein scheint. E'' soll als perspektivische Entfernung bezeichnet werden. Ihr Wert folgt aus den vorstehenden Gleichungen durch Elimination von G zu

$$E'' = E/\Gamma. \tag{3}$$

Die Empfindungen für die Grösse des Netzhautbildes und die wahre Grösse des Gesichtsobjektes, die als Positionen 2 und 3 in der Liste der Informationen

aufgeführt sind, führen also zur strahlenoptischen Definition der perspektivischen Entfernung E''. Auch diese kann beim natürlichen Sehen nie den Wert Unendlich erreichen, da Γ wegen Irradiation und Beugung immer grösser ist als Eins. Für $\varphi = 0$ wird Γ sogar unendlich gross, denn φ' ist durch die Grösse des Netzhautbildes bestimmt, das mindestens die Dimension eines Netzhautelementes hat. Freilich ist die Maximalentfernung von E'' um ein Vielfaches grösser als R, so dass ihr gegenüber Kehrwert $1/R$ nicht zum Tragen kommt und deshalb vernachlässigt werden kann.

Beim beidäugigen Sehen dient das Gesichtsobjekt als Fixationsstelle, auf die sich die Augenachsen beim Blicken richten. Dazu ist wieder eine Muskelanstrengung nötig, die der Willkür unterliegt und damit ein Konvergenzgefühl auslöst. Die Entfernung des Fixationspunktes von der Augenbasis b soll als Konvergenzentfernung E_k bezeichnet werden. Dann gewinnt man den Winkel w, den die Augenachsen miteinander bilden, aus der Gleichung

$$(4) \qquad w = b/E_k .$$

Zur strahlenoptischen Festlegung des Konvergenzgefühles, das als Position 4 in der Liste der Informationen aufgeführt ist, soll die Konvergenzentfernung E_k dienen, die ebenfalls wegen der begrenzten Sehschärfe des Auges (Noniensehschärfe) nur endliche Beträge annehmen kann. Der Grenzwert verhält sich jedoch zu R wie die Augenbasis b zur Augenpupille p, so dass er gegenüber dem Grenzwert bei der Akkommodation nicht zum Tragen kommt und deshalb ebenso wie der Grenzwert der perspektivischen Entfernung vernachlässigt werden kann.

Die als Position 5 in der Liste der Informationen aufgeführte Querdisparation lässt sich als Entfernungsdifferential dE_k aus Gl. (4) durch Differentiation des Konvergenzwinkels nach der Konvergenzentfernung, entsprechend

$$(5) \qquad dw = -b.\, dE_k/E_k^2,$$

formulieren.

Bei der Ermittlung der Wahrnehmungsfunktion sollen die Randbedingungen der dazu notwendigen Versuche so gewählt werden, dass weder die Querdisparation noch der nach Position 6 der Liste der Informationen in Erscheinung tretende Einfluss der Bewegung des Sehdinges zum Tragen kommen. Dazu ist es nötig, nur mit flachen und unbewegten Gesichtsobjekten zu experimentieren. Das bedeutet freilich eine Einschränkung des allgemeinen Charakters der Untersuchungen, die insofern noch weiter zu treiben ist, als auch die übrigen Positionen 7, 8 usw. als Grössen höherer Ordnung unberücksichtigt bleiben sollen. Als Rechtfertigung für diese Beschränkung möge die Erfahrung gelten, nach der man beim Betreten von Neuland die Schritte zunächst nur kurz wählen soll, um nicht bereits zu Beginn der Entdeckungsreise zu straucheln.

Unter diesen Gesichtspunkten ergibt sich die im Sehraum wahrgenommene Entfernung E_w eines Sehdinges, entsprechend

$$(6) \qquad E_w = f(E', E'', E_k),$$

als Funktion der Akkommodationsentfernung E', der perspektivischen Entfernung E'' und der Konvergenzentfernung E_k des Gesichtsobjektes G. Diese drei Informationen sind als Bestandteile des Gesichtsraumes in diesem strahlenoptisch durch die Gln. (1), (3) und (4) definiert. Sie sind beim natürlichen Sehen nur wenig voneinander verschieden, so dass trotz der Unsicherheit, mit der sie einzeln im Sehvorgang wirksam werden, auf Grund der Gl. (6) eine gute Übereinstimmung zwischen Sehraum und Gesichtsraum zu erwarten ist, selbst wenn beim Einzelindividuum die eine oder die andere dieser Informationen aus physiologischen Gründen ausfallen sollte.

IV. **Die Wahrnehmungsfunktion.** — In einem Ende Mai 1956 im Kolloquium über optische und lichttechnische Fragen der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg gehaltenen Vortrag über den Unterschied zwischen strahlenoptischer und physiologischer Vergrösserung hat der Verfasser dieses Aufsatzes das Ergebnis seiner mehr als zwanzigjährigen Untersuchungen zur Ermittlung der Wahrnehmungsfunktion (6) dargelegt. Das Problem erfordert die Beantwortung der Frage, welche Sehgrösse bzw. Sehferne durch die vom Gesichtsraum ausgehenden Informationen im Sehraum wirksam wird. Entsprechend der Bezeichnung E_w für die Sehferne soll die Sehgrösse als die wahrgenommene Grösse des Sehdinges mit $G_w = E_w.\ \mathrm{tg}\ \varphi'$ bezeichnet werden. Vermittels $G = E.\ \mathrm{tg}\ \varphi$ und den Gln. (2) und (3) gewinnt man daraus für die physiologische oder subjektive Vergrösserung die Beziehung

$$(7) \qquad \Gamma' = \frac{G_w}{G} = \frac{E_w}{E''} .$$

An dieser Stelle sei auf die grosse Bedeutung hingewiesen, die der perspektivischen Entfernung E'' im Sehraum zukommt. Das hat bereits M. v. Rohr vor vielen Jahren erkannt und mit den Worten ausgedrückt : “ Man geht kaum zu weit, wenn man der natürlichen Perspektive für die Raumvorstellung eine noch grössere Bedeutung beilegt als sogar dem Sehen mit beiden Augen. ” Der Grund dafür ist ein psychologischer, der mit Position 3 der Liste der Informationen in engem Zusammenhang steht. Alle übrigen Positionen dieser Liste sind physiologischer Natur, weshalb der Verfasser die im Sehraum wirksame und durch Gl. (7) definierte Vergrösserung bisher auch in nicht ganz korrekter Weise als physiologische Vergrösserung bezeichnet hat.

Als Ergebnis einer Vielzahl von Versuchen ergibt sich folgender Ausdruck für die Wahrnehmungsfunktion :

$$\text{(8)}\qquad \frac{G}{G_{\mathrm{w}}} = 1 - x\,\mathrm{e}^{-1/(1-x+x\,E_1/E'')} + E_0\left(\frac{1}{E_{\mathrm{k}}} - \frac{1}{E'}\right)\mathrm{e}^{-x\,E_2/E''}.$$

Darin treten neben dem Hilfswert

$$\text{(9)}\qquad x = 1 - E''/E'$$

und den Konstanten

$$E_0 = 21\ \text{cm},\quad E_1 = 33{,}8\ \text{cm},\quad E_2 = 16\ \text{cm},$$

nur die 3 Informationen E', E'' und E_{k} als unabhängige Variable auf, wie es von Gl. (6) gefordert wird.

Setzt man in den Gln. (7), (8) und (9) $E_{\mathrm{k}} \sim \infty$, $E'' = f$ und $E' \sim \infty$, so erhält man die Formel für die subjektive Vergrösserung des Mikroskops bzw. einer Lupe der Brennweite f. Setzt man $E_{\mathrm{k}} \sim \infty$, $E'' \sim \infty$, und $E' = E \sim \infty$, so folgt aus den vorstehenden Gleichungen die subjektive Vergrösserung des Prismenglases. Dabei werden Gleichungen gewonnen, die mit der Erfahrung weit besser in Einklang stehen als die konventionellen Vergrösserungsformeln, bei denen der Dualismus unseres visuellen Lebensraumes unberücksichtigt geblieben ist. Darin liegt auch eine Rechtfertigung für die reichlich komplizierte Form der Wahrnehmungsfunktion, die die Leistungsfähigkeit unseres Gehirns in anschaulicher Weise kennzeichnet. Auch mag die Schwierigkeit, exakt in die Gesetzmässigkeit der im Sehraum wirksamen Erscheinungen einzudringen, in der Gestalt der Wahrnehmungsfunktion zum Ausdruck kommen.

V. **Das natürliche Sehen**. — Die Beschreibung des natürlichen Sehvorganges hat von einer Diskussion der dabei auftretenden Informationswerte auszugehen. Im Gesichtsraum, d. h. der realen Welt, stimmen perspektivische Entfernung und Konvergenzentfernung mit der wahren Entfernung des Gesichtsobjektes überein. Erst bei sehr grossen Objektabständen E reicht der Informationsgehalt dieser Grössen nicht mehr aus, um die Unvollkommenheit unseres Sehapparates zu verdecken. Anders sieht es bei der Akkommodationsentfernung aus. Hier weigert sich bereits in einem verhältnismässig kurzen Abstand R das Auge, die Information einer höheren Entfernung entgegenzunehmen. Für die mathematische Behandlung des Problems erschien es dem Verfasser gleichgültig, ob man diese Eigentümlichkeit des Sehvorganges, so wie es hier geschehen ist, in Gl. (1) zum Ausdruck bringt oder die Grösse R in den Gl. (8) und (9) unterbringt. Aus didaktischen Gründen wurde der hier beschrittene Weg gewählt, der die an sich schon sehr verwickelte Gestalt von Gl. (8) nicht erneut belastet und damit übersichtlichere Verhältnisse schafft. Die Frage, ob ein solches Verfahren zulässig ist, soll im Rahmen dieses Aufsatzes unbeantwortet bleiben. Ein wesentlicher Einfluss auf das Rechenergebnis ist durch andere Wahl der Definitionen jedoch nicht zu erwarten.

Auf der linken Seite von Gl. (8) steht das Verhältnis aus der Objektgrösse und der Dinggrösse. Letztere ist ein Bestandteil des Sehraumes und damit dem Masssystem des Gesichtsraumes nicht zugänglich. Erstere ist nach Position 3 der Liste der Informationen ebenfalls im Sehraum vorhanden, sie ist aber gleichzeitig auch eine im Gesichtsraum wohldefinierte Grösse und als solche mit der in diesem gültigen Einheit des Masssystems, dem Zentimeter, festlegbar. Aus dieser dualen Bedeutung der linearen Grösse G, die innerhalb der beiden inkommensurablen Räume nach Belieben mit anderen Grössen anhand des jeweils entsprechenden Masssystems verglichen werden kann, folgt die logische Berechtigung für die Aufstellung der Wahrnehmungsfunktion als einer Beziehung, durch welche Grössen des Sehraumes mit Grössen des Gesichtsraumes verknüpft werden. Wäre diese schon im Kindheitsalter gewonnene Erfahrung nicht vorhanden, so könnten keine derartigen Gleichungen formuliert, sondern es könnte höchstens von " Entsprechungen " geredet werden, was manche Physiologen und Psychologen auch tun. In diesem Falle wäre die Übereinstimmung zwischen Sehraum und Gesichtsraum aber eine recht lockere, die sicherlich für die Notwendigkeit, sich eben gerade im Gesichtsraum zu orientieren, nicht ausreichen dürfte.

Setzt man in die Gln. (7), (8) und (9) die Informationswerte, die für den Normalsichtigen beim natürlichen Sehen ($E_{\mathrm{f}} = \infty$) gelten, nämlich

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{E} + \frac{1}{R},\ E'' = E_{\mathrm{k}} = E,$$

ein, so ergibt sich die Gleichung

$$\text{(10)}\quad \frac{1}{\Gamma'} = \frac{E}{E_{\mathrm{w}}} = 1 + \frac{1}{R}\left[E\,\mathrm{e}^{-R/(R+E-E_1)} - E_0\,\mathrm{e}^{E_2/R}\right].$$

Das ist die Wahrnehmungsfunktion für den Sehraum im Falle des natürlichen Sehens. Setzt man darin E klein gegen R, so kann das zweite Glied auf der rechten Seite der Gleichung gegenüber Eins vernachlässigt werden und es folgt $\Gamma' = 1$ bzw. $E_{\mathrm{w}} = E$. In diesem Bereich stimmen also Sehraum und Gesichtsraum miteinander überein, was der Forderung nach einer optimalen Orientierung des Menschen in seinem Lebensraum Rechnung trägt. Diese Forderung muss mindestens für den Umweltbereich, der einer Armlänge entspricht, erfüllt sein, d. h. R muss selbst in extremen Fällen noch um einiges grösser sein als diese.

Mit zunehmendem Abstand der Gesichtsobjekte wird die Bedeutung ihrer strengen Lokalisierung geringer und zwar umso mehr, je schlechter die Sichtverhältnisse sind. Besonders in der Nacht ist ein kleiner Wert von R zulässig, worauf mit Bezug auf die Nachtmyopie J. M. Otero hingewiesen hat. Das legt im übrigen eine Abhängigkeit des Wertes R von der Leuchtdichte nahe, die sich, wie gleich gezeigt werden wird, auch tatsächlich ergibt. Am hellen Tage, beson-

ders aber zur Zeit der beginnenden Dämmerung, barg die Umwelt für den Menschen der Frühzeit eine Fülle von Gefahrenquellen. Aus diesem Grunde wurde derjenige Umweltbereich, der etwa einen Steinwurf weit reichte, vom Verfasser in seiner Broschüre " Die Struktur des Sehraumes " als Gefahrenraum bezeichnet. Ein nach logischen und ontogenetischen Gesichtspunkten sinnvoller Sehraum braucht also nicht bis ins Unendliche zu reichen. In der Dämmerung ist ein relativ hoher Wert zu fordern, während in der Nacht und bis zu einem gewissen Grade auch am blendend hellen Tage der Gefahrenraum enger begrenzt sein darf. Es ist erstaunlich, in welch optimaler Weise die Physiologie unseres Gesichtssinnes diesen Forderungen gerecht wird.

VI. **Die Ausdehnung des natürlichen Sehraumes.** — Lässt man in der Wahrnehmungsfunktion (10) die Entfernung E des Gesichtsobjektes über R hinaus zu sehr grossen Beträgen anwachsen, so verwandelt sich diese Funktion schliesslich in die einfache Gleichung

$$\frac{1}{E_w} = \frac{1}{E} + \frac{1}{R}.$$

Wie man daraus ersieht, ist R der Radius des Sehraumes, denn die wahrgenommene Entfernung E_w erreicht für einen unendlich grossen Objektabstand E gerade eben diese Grenze. Wäre R unveränderlich, so würde uns der Sehraum in Gestalt einer Halbkugel von wohlbestimmtem endlichen Radius erscheinen. Das ist mitunter auch der Fall, besonders in klaren Nächten im Hochgebirge. Normalerweise ist aber die Leuchtdichte des Himmelshintergrundes nicht konstant, woraus sich eine Richtungsabhängigkeit von R ergibt und die Himmelssphäre eine Abflachung erfährt.

Die Grösse von R wird aus folgender Überlegung gewonnen : Die Pupille p des Auges erscheint von einem Gesichtsobjekt aus, das den Akkommodationsabstand E' hat, unter dem Winkel

$$\sigma = \frac{p}{E'}.$$

Entsprechend Gl. (1) folgt daraus mit $E_f = \infty$

$$\sigma = p\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{R}\right).$$

Führt man in diese Beziehung $E = \infty$ ein, so ergibt sich die Formel

(11) $$R = p/\sigma,$$

aus der der gesuchte Radius R des Sehraumes gewonnen werden kann. Nach H. Schober besteht zwischen der Pupillenweite p (in mm) und der Leuchtdichte B (in asb) die Beziehung

$$p = 5{,}8 - 0{,}913.\log B.$$

Nach A. König beträgt die Sehschärfe des menschlichen Auges

$$\sigma = \sigma_0/0{,}43\ (1{,}29 + \log B) \text{ für } B < 10 \text{ asb},$$
$$\sigma = \sigma_0 \text{ für } B > 10 \text{ asb}.$$

Mit $\sigma_0 = 20''$ errechnen sich daraus die in Figur 1 wiedergegebenen Werte von R. Der Radius des Sehraumes übersteigt in der dunklen Nacht nur wenig

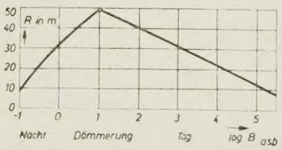

Fig. 1

den Wert von 10 m, wächst mit zunehmender Beleuchtungsstärke bis zum Dämmerungswert von etwa 50 m an, um dann bei weiterer Helligkeitszunahme wieder langsam abzusinken. Es gibt also für jeden Wert von R zwei Beleuchtungsstärken oder, anders ausgedrückt, der Sehraum vollführt eine pulsierende Bewegung, durch die er um Mittag und um Mitternacht in Richtung des Zenits am stärksten zusammenschrumpft und in den zeitigen Morgen- und späten Abendstunden in der Horizontalrichtung seine grösste Ausweitung erfährt. Mit dieser Eigentümlichkeit hängt es zusammen, dass die Sehdinge in der Dämmerung grösser wirken als zu den anderen Tageszeiten, wie man aus Figur 2 ersehen kann, in der die subjek-

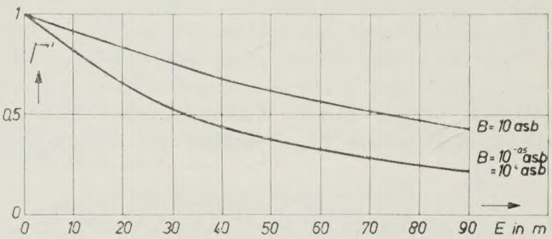

Fig. 2

tive Vergrösserung Γ' in Abhängigkeit von der Entfernung E des Gesichtsobjektes, entsprechend Gl. (10) aufgetragen ist. Die obere Kurve beschreibt die Verhältnisse in der Dämmerung, die untere gilt für Tag- und Nachtbeobachtung. Beiden ist das asymptotische Absinken auf $\Gamma' = 0$ für $E = \infty$ gemeinsam. Mit zunehmender Entfernung werden die Sehdinge also immer stärker verkleinert wahrgenommen. Am Tage und in der Nacht ist die Wahrnehmungsgrösse in 30 bis 40 m Abstand bereits auf die Hälfte des Wertes abgesunken, den sie im Nahbereich, in dem der Sehraum mit dem Gesichtsraum noch praktisch übereinstimmt, besitzt. In der Dämmerung tritt die gleiche Schrumpfung der Sehgrösse erst in 70 bis 80 m Entfernung des Gesichtsobjektes ein.

Figur 3 zeigt die wahrgenommenen Entfernungen E_w bei den gleichen Beleuchtungsverhältnissen. Die obere Kurve nähert sich asymptotisch dem Grenzwert $R = 49$ m, die untere $R = 21$ m, entspre-

chend den bei den verschiedenen Tageszeiten unterschiedlichen Beleuchtungen bzw. Sehraumdurchmessern. Ein nicht realisierbarer unendlich grosser Sehraum würde mit dem Gesichtsraum völlig übereinstimmen und zu der Geraden führen, die den Winkel zwischen den Koordinaten halbiert.

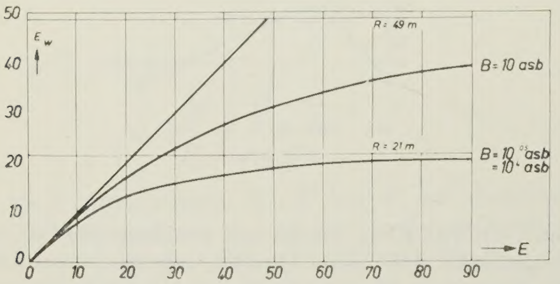

Fig. 3

In 10 m Abstand zeigt der Sehraum in der Dämmerung ($B = 10$ asb), wie man aus der Abbildung ersieht, noch keine nennenswerte Deformation gegenüber dem Gesichtsraum, während die andere für die Tages- und Nachtbeobachtung geltende Kurve von Figur 3 in diesem Abstand bereits eine Schrumpfung des Sehraumes um etwa 18 % ausweist.

VII. **Die schwankende Wahrnehmungsgrösse von Sonne und Mond**. — Eine auffällige und immer wieder beobachtete Erscheinung ist die, dass Sonne und Mond am Horizont grösser erscheinen als im Zenit, sowohl am Tage wie in der Nacht. Diese Beobachtung erklärt sich mit Hilfe der Wahrnehmungsfunktion auf völlig zwanglose Weise. Beide Himmelskörper haben im Gesichtsraum sowie im Sehraum die Winkelgrösse

$$\frac{G}{E} = \frac{G_w}{E_w} = 30' = 0{,}00875 \text{ Bogenmass.}$$

Da E hierbei praktisch gleich Unendlich ist, wird, entsprechend Gl. (10), $E_w = R$, und die Sehgrösse von Sonne und Mond ist mit

$$G_w = 0{,}00875 . \; R \tag{12}$$

anzusetzen. Aus Figur 1 können die praktisch auftretenden Werte von R entnommen werden. Sie schwanken zwischen 10 m in der dunklen Nacht und am hellsten Tage und 49 m in der Dämmerung. Die sich daraus ergebenden Sehgrössen von Sonne und Mond liegen also zwischen 0,09 und 0,43 m. R. v. Sterneck, der sehr sorgfältige und umfangreiche Beobachtungen dieser Grössen angestellt hat, findet Werte die zwischen 0,1 m im Zenit und 0,49 m bei stark bedecktem Himmel am Horizont liegen.

Hier gilt natürlich, wie schon eingangs ausgeführt wurde, die Einschränkung, dass im Sehraum eigentlich nicht mit den Masseinheiten des Gesichtsraumes operiert werden darf. Die Rechnung gibt zwar einen auf den Sehraum übertragbaren Vergleichswert zu den adäquaten Werten des Gesichtsraumes. Bei der subjektiven Beurteilung der wahrgenommenen Grösse von Sonne und Mond muss aber der im Sehraum gültige Massstab zugrunde gelegt werden. Das ist in unserem Falle beispielsweise die Grösse eines Tellers oder eines Fussballes. Aus der Erkenntnis dieser Eigenschaft des Sehraunes stammt wohl auch der Ausdruck " Tellermond ". Freilich kann man nachträglich den Teller, in dessen Grösse einem der Mond erschienen ist, ausmessen und seine im Gesichtsraum gültige Dimension feststellen. Sterneck wird bei seinen Beobachtungen sicherlich in einer diesem Verfahren analogen Weise vorgegangen sein, denn anders lassen sich wohl kaum so präzise Ergebnisse erzielen, wie er sie gewonnen hat, welche zudem mit den ihm noch völlig unbekannten theoretischen Erwartungen in überraschend gutem Einklang stehen.

Sehraum und Gesichtsraum sind also, wie hier gezeigt werden sollte, zwei selbständige Realitäten, die in einem exakt zu formulierenden Zusammenhang miteinander stehen. Die logisch begründbare Existenz des einen hat die Existenz des anderen zur Voraussetzung.

Manuscrit reçu le 13 octobre 1956.

Literatur

M. v. Rohr, *Münch. Ber.*, **36**, 1906, 487.
R. v. Sterneck, *Der Sehraum auf Grund der Erfahrung*, Leipzig, 1907.
M. Planck, *Das Weltbild der neuen Physik*, Leipzig, 1929.
N. Günther, *Zs. f. Instr. Kde*, **57**, 1937, 239.
A. v. Tschermak, *Einführung in die physiologische Optik*, Wien, 1942.
H. Schober, *Das Sehen* (Bd. I), Darmstadt, 1950.
N. Günther, *Die Struktur des Sehraumes*, Stuttgart, 1955.
V. Ronchi, *Optik*, **13**, 1956, 322.
N. Günther, *Naturw. Rundschau*, **10**, 1957, 29.

N° d'éditeur 129. — *Revue d'optique*. — *Le Directeur* : Emile Perrin.
Commission paritaire des papiers de Presse n° 29754

3691. — Imprimerie JOUVE, 15, rue Racine, Paris. — 11-57